УДК 53(075.8)
Б93
ББК 22.3

БУТИКОВ Е. И., КОНДРАТЬЕВ А. С. **ФИЗИКА**: Учеб. пособие: В 3 кн. Кн.1. **Механика.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 — 352 с. — ISBN 5-9221-0107-2 (Кн. 1).

Учебник принципиально нового типа. Последовательность изложения соответствует логической структуре физики как науки и отражает современные тенденции ее преподавания. Материал разделен на обязательный и дополнительный, что позволяет строить процесс обучения с учетом индивидуальных способностей учащихся, включая организацию их самостоятельной работы. Задачи служат как для получения новых знаний, так и для развития навыков исследовательской деятельности.

Для учащихся школ, гимназий, лицеев с углубленным изучением физико-математических дисциплин, а также для подготовки к конкурсным экзаменам в вузы.

Ил. 233.

Рецензенты: профессор *В.И. Николаев*, преподаватель *М.Л. Шифман*

Учебное издание

БУТИКОВ Евгений Иванович
КОНДРАТЬЕВ Александр Сергеевич

ФИЗИКА
Книга 1. **Механика**

Редактор *Д.А. Миртова*
Операторы набора и корректоры: *Н.В. Болотина*, *Л.А. Андреева*, *Л.Н. Серых*, *Н.В. Дзюба*
Оформление обложки *А.Ю. Алехиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99.

Подписано в печать 16.02.01. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 24,2. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0110-2
ISBN 5-9221-0107-2 (Кн. 1)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 9

I. КИНЕМАТИКА 11

§ 1. Пространство. Время 11

Свойства симметрии (12).

§ 2. Механическое движение. Система отсчета 13

Система отсчета (13). Объективное и субъективное в законах природы (15).

§ 3. Материальная точка. Поступательное движение 16

Физическая модель (18).

§ 4. Радиус-вектор. Перемещение 19

Траектория (19). Сложение векторов (20).

§ 5. Одновременные перемещения. Сложение перемещений 21

Независимость перемещений (22). Геометрия и опыт (23). Искривленное пространство (24).

§ 6. Средняя скорость 25

Вектор средней скорости (26). Пройденный путь (26).

§ 7. Скорость 28

Вектор скорости и траектория (28). Скорость прохождения пути (29). Сложение скоростей (29). Скорость как производная (34).

§ 8. Ускорение 34

Ускорение — вектор (35). Направление ускорения (35). Центростремительное ускорение (36). Ускорение — производная скорости (37). Тангенциальное и нормальное ускорения (39).

§ 9. Одномерное движение 41

График движения (41). Путь на графике скорости (43). Степени свободы (45).

§ 10. Неравномерное одномерное движение 46

Равноускоренное и равнозамедленное движения (46). Путь при равнопеременном движении (47). Скорость и наклон касательной (48). Свободное падение (50). Формулы равноускоренного движения (55).

§ 11. Движение по окружности 57

Период и частота (58). Угловая скорость как вектор (60). Векторное произведение (60).

§ 12. Равнопеременное движение в пространстве 61

Перемещение в пространстве (61). Векторные формулы при $a = \text{const}$ (65).

§ 13. Траектории 65

Системы координат (66). Координаты как проекции радиуса-вектора (66). Траектория — плоская кривая (67). Уравнение траектории (68). Независимость движений (69). Граница достижимых целей (70). Другой способ нахождения границы (72). Нахождение экстремумов (73). Обратимость движения (74).

§ 14. Относительность механического движения 76

Движение в разных системах отсчета (76). Относительная скорость и ускорение (77).

II. ДИНАМИКА 83

§ 15. Инерция. Первый закон Ньютона 83

Системы отсчета в динамике (83). Движение по инерции (84). Инерциальные системы отсчета (85). Геоцентрическая и гелиоцентрическая системы отсчета (85). Первый закон Ньютона (86). Свободное тело (86). Инерциальные системы и опыт (87).

§ 16. Сила — мера взаимодействия 88

Виды сил (88). Измерение сил (88). Градуировка динамометра (89). Сила — вектор (90).

§ 17. Связь между силой и ускорением. Второй закон Ньютона 91

Инертность (93). Масса как мера инертности (93). Свойства массы (93). Второй закон Ньютона (94). Сила и движения (94).

§ 18. Взаимодействие тел. Третий закон Ньютона 95

Действие и противодействие (96). Взвешивание Луны (97). Логическая структура динамики (99). Законы динамики и опыт (100).

§ 19. Применение законов динамики 101

Движение со связями (101).

§ 20. Силы в природе. Трение 107

Виды трения (108). Трение покоя (109). Трение скольжения (110). Полная сила реакции (111).

§ 21. Проявления сухого трения 117

Природа сил трения (117). Как управлять трением (119). «Занос» автомобиля (121). Нелинейные свойства трения (121).

§ 22. Силы тяготения 124

Гравитационная постоянная (124). Законы Кеплера (125). Гравитационное поле (126). Напряженность поля тяготения (126). Принцип суперпозиции (127). Притяжение сферических тел (127). Свободное падение (129). Взвешивание Земли (129). Геометрия и тяготение (130). Инертная и гравитационная массы (131).

§ 23. Движение в поле тяготения 133

Первая космическая скорость (133). Круговая скорость (134). Кеплерово движение (136). Конические сечения (137). Сила тяжести внутри Земли (137).

§ 24. Силы упругости и деформации 140

Виды деформаций (140). Закон Гука (140). Модуль Юнга (141). Коэффициент Пуассона (142). Всестороннее сжатие (142). Неоднородная деформация (142). Проявление упругих сил (143).

§ 25. Механическое состояние. Уравнение движения 143

Уравнение движения (144). Начальные условия (144). Алгоритм численного решения (144). Системы взаимодействующих тел (146). Нахождение сил по движению (146). Разные движения поэллипсам (149).

§ 26. Принцип относительности Галилея 150

Равноправие инерциальных систем (150). Абсолютные и относительные величины (151). Движение в разных системах отсчета (152). Принцип относительности на практике (153).

§ 27. Системы единиц 155

Эталон (155). Соотношения между единицами (155). Основные и производные единицы (155). Единицы площади (156). Размерность физической величины (156). Эталоны времени и длины (157). Эталон массы (157).

§ 28. Метод анализа размерностей 158

Применения метода размерностей (159). Выбор параметров (160). Безразмерный параметр (160). Векторные единицы длины (161).

III. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ 157

§ 29. Импульс. Импульс силы 165

Закон изменения импульса (165). Импульс силы (166). Импульс системы (166). Внутренние и внешние силы (166). Сравнение с динамическим подходом (167).

§ 30. Центр масс. Реактивное движение 172

Определение центра масс (172). Скорость центра масс (173). Закон движения центра масс (174). Космонафт вне корабля (174). Роль внутренних сил (175). Реактивное движение (176). Уравнение Мещерского (176). Формула Циолковского (178). Топливо для космических полетов (178).

§ 31. Механическая работа. Кинетическая энергия 179

Свойства работы (180). Работа переменной силы (181). Мощность (182). Единицы работы и мощности (182). Кинетическая энергия (182). Теорема о кинетической энергии (183).

§ 32. Потенциальная энергия 186

Превращения энергии (186). Работа внутренних сил (186). Потенциальная энергия (187). Работа в однородном поле (188). Работа и потенциальная энергия (188). Центральное поле (189). Потенциальная энергия а поле тяготения (189). Энергия упругой деформации (192). Связь силы и потенциальной энергии (192). Эквипотенциальные поверхности (193). Вывод формулы для потенциальной энергии (194). Градиент функции (195).

§ 33. Закон сохранения механической энергии 195

Механическая энергия (195).

§ 34. Связь законов сохранения с симметрией пространства и времени 201

Однородность пространства (202). Однородность времени (202). Связь пространства и времени (203). Сохранение энергии и однородность времени (204). Симметрия при масштабных преобразованиях (205). Физическое подобие (206).

§ 35. Применение законов сохранения при решении задач 207

§ 36. Космическая динамика и законы сохранения 216

Вторая космическая скорость (216). Космические скорости и движение Земли (224). Третья космическая скорость (227). Сохранение энергии и системы отсчета (228). О задаче трех тел (229).

§ 37. Столкновения частиц 230

Неупругие столкновения (231). Приведенная масса (231). Упругие столкновения (232). Передача энергии при еударе (233). Система центра масс (235). Угол рассеяния (236). Обратимость упругих столкновений (237). Отбор нужных решений (237).

§ 38. Фазовая плоскость. Адиабатические инварианты 242

Фазовые траектории (242). Фазоваф траектория и потенциальная энергия (244). Математический маятник (245). Фазовый портрет маятника (246). Адиабатические инварианты (247). Пример инварианта (248). Геометрический смысл инварианта (249). Физический смысл инварианта (249). Условие существования инварианта (250).

§ 39. Механическое равновесие 251

Модель абсолютно твердого тела (251). Условия равновесия (252). Силы реакции (253). Момент силы (253). Уравнение моментов (253). Пример равновесия (254). Золотое правило механики (255). Устойчивость равновесия (257). Роль трения (259).

§ 40. Движение твердого тела 260

Поступательное движение(260). Вращение вокруг оси (261). Плоское движение (261). Вращение вокруг точки (262). Момент импульса (263).

Динамика твердого тела (263). Момент инерции (263). Кинетическая энергия (265). Гироскоп (265).

IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ 267

Признаки колебаний (267). Особенности физики колебаний (267).

§ 41. Собственные колебания 268

Простейший осциллятор (268). Гармонические колебания (270). Частота и период (270). Фаза колебаний (270). Начальные условия (270). Изохронность осциллятора (271). Векторный диаграммы (271). Энергетические превращения (271). Фазовые траектрии (274). Линейные и нелинейные системы (274). Ангармонический маятник (278).

§ 42. Затухающие колебания 279

Осциллятор с затуханием (279). Диссипация энергии (279). Время жизни колебаний (281). Фазовая траектория (281). Точное решение (281). Сухое трение (282). Область застоя (282). Сшивание решений (283). Фазовая траектория (284). Погрешности стрелочных приборов (284). Идеализации в принятой модели (285). Неоднородная деформация пружины (286). Энергия осциллятора и быстрые колебания (287).

§ 43. Собственные колебания в разных физических системах 288

§ 44. Вынужденные колебания. Резонанс 295

Установление колебаний (295). Синусоидальное воздействие (295). Уравнение движения (296). Установившиеся колебания (296). Фазовые соотношения (297). Резонанс (298). Векторные диаграммы (299). Резонансные Кривые (301). Максимальная амплитуда (302). Фазовые соотношения (302). Резонанс скорости (303).

§ 45. Энергетические превращения при вынужденных колебаниях. Установление колебаний 304

Энергия установившихся колебаний (302). Энергетические превращения (302). Поглощаемая мощность (305). Устойчивость вынужденных колебаний (306). Переходные процессы (306). Время установления колебаний (308). Несинусоидальное периодическое воздействие (309).

§ 46. Волны 311

Волны в дискретной цепочке (311). Поляризация волн (312). Волны в натянутой струне (313). Длина струны (313). Скорость поперечной волны (314). О дисперсии волн (316). Скорость продольных волн (316). Энергия волны (317). Плотность кинетической энергии бегущей волны (317). Плотность потенциальной энергии (318). Энергия бегущей воны (319). Плоская волна (320). Сферическая волна (320).

§ 47. Интерференция и дифракция волн. Эффект Доплера 321

Когерентные волны (321). Интерференционная картина (321). Стоячая волна (323). Стоячая волна и маятник (321). Волновые поверхности (324). Фронт волны (324). Принцип Гюйгенса (325). Волны в неоднородной среде (326). Дифракция волн (326). Волна от движущегося источника (327). Конус Маха (328). Эффект Доплера (329). Акустические волны (330).

V. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ 332

§ 48. Гидростатика 332

Закон Паскаля (332). Гидростатический парадокс (333). Закон Архимеда (333). Плавание тел (334). Устойчивость погруженного тела (334). Гидростатическое взвешивание (336).

§ 49. Движение идеальной жидкости 337

Несжимаемая жидкость (337). Линии тока (337). Уравнение неразрывности (338). Идеальная жидкость (338). Уравнение Бернулли (339). Давление в потоке (340). Медицинский шприц (341). Формула Торричелли (341). Форма струи (342). Реакция струи (343). Гидравлический удар (343).

§ 50. Вязкая жидкость. Обтекание тел 345

Пограничный слой (345). Вязкость (345). Ламинарное течение (346). Турбулентное течение (346). Обтекание тела потоком (347). Парадокс Даламбера (347). Подъемная сила (348). Эффект Магнуса (348). Вязкость и циркуляция (349). Лобовое сопротивление (351). Вязкая жидкость в трубе (351).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение физики составляет неотъемлемую часть полноценного образования, подразумевающего получение не только определенной суммы знаний в некоторой области, но и всестороннее развитие человеческой личности.

Значение физики в формировании научного мировоззрения определяется ее непреходящей ролью лидера современного естествознания. Физика задает стиль научного мышления, отличающийся высоким совершенством и сбалансированностью качественного и количественного описания явлений природы. Общепризнано, что степень развития той или иной области других естественных наук (химии, биологии, геологии и т. д.) оценивается тем, насколько близко им удается подойти к уровню, характерному для физики.

Физика занимает особое место среди всех естественных наук, так как она изучает наиболее фундаментальные и универсальные закономерности взаимодействий частиц и полей, лежащие в основе всех других явлений — химических, биологических, астрономических, геологических и др. Установленные в физике закономерности обладают наибольшей общностью и в определенном смысле являются окончательными: законы Ньютона, уравнения Максвелла, уравнение Шредингера всегда останутся справедливыми — каждые в своей области, — так как любая новая физическая теория сводится к прежней в той области эмпирического знания, где старая теория выдержала проверку экспериментом.

Предлагаемый учебник ориентирован на работу по программе, принципиально отличающейся от всех использовавшихся до сих пор. Большое внимание в нем уделено преодолению характерного для учебников недостатка, связанного с тем, что на отбор включенного в них материала неизбежно оказывала влияние ограниченность доступных математических средств. В результате этот отбор не в полной мере основывался на истинной научной значимости того или иного конкретного вопроса.

Новые принципы отбора материала прежде всего привели к отличной от традиционной структуре курса физики, когда изложение строится не по принципу историзма, отражающему историческую последовательность различных разделов — механика, физика тепловых явлений, электромагнетизм и т. д., а опирается на внутреннюю логику и методологию физики как науки. При таком подходе многие открытия современной физики в идейном плане оказываются более простыми, чем ряд уже давно изучавшихся традиционных

вопросов, получивших в действительности удовлетворительное разрешение только в самое последнее время (например, проблема обоснования термодинамики и статистической физики).

Структура курса физики, принятая в данном учебнике, такова. В книге 1 изучаются основы механики, изложение которой строится с учетом общих методологических принципов физики, таких, как принцип симметрии, относительности, соответствия и т. д.

Книга 2 включает в себя основы электродинамики и оптики, изложение которых базируется на фундаментальных представлениях об электромагнитном поле без детализации структуры вещества, рассматриваемого здесь чисто феноменологически.

Наконец, в книге 3 на основе развития фундаментальных механических и электромагнитных представлений развивается последовательная картина строения и свойств вещества от атома до Вселенной.

В каждом разделе учебника выделен основной материал, что позволяет добиваться глубокого и прочного его усвоения, не загружая память учащихся множеством частных деталей. Дополнительный материал, отмеченный полосой слева, при первом чтении можно опустить без ущерба для понимания логических связей. Особое внимание уделено мировоззренческому аспекту изучаемых физических теорий и их месту в научной картине мира. В учебнике отражены теоретико-познавательные стороны излагаемого материала: границы применимости физических теорий, соотношения между физическими теориями и законами различной степени общности, роль опыта в физике как источника знаний и критерия правильности теории, сведения из истории физики.

Центральное место в курсе занимают фундаментальные физические законы сохранения — энергии, импульса, электрического заряда. Подробно рассматривается их соотношение с физическими законами, описывающими конкретные явления, — законами Ньютона, Ома, Ампера, Фарадея, Ленца и т. д.

Построение предлагаемого курса опирается не только на внутреннюю логику физики как науки, но предполагает максимально возможную реализацию межпредметных связей, в частности с курсами математики, астрономии, химии, биологии и т. д.

Значительное внимание в учебнике уделено задачам, решение которых составляет важную часть эффективного изучения физики на любом уровне — от первоначального, школьного, вплоть до профессионального физико-математического образования.

I. КИНЕМАТИКА

Все без исключения физические явления происходят в пространстве и во времени. Приступая к изучению простейших физических явлений, объединяемых общим названием «механическое движение», нужно в первую очередь составить представление о содержании этих фундаментальных понятий — *пространства* и *времени*.

§ 1. Пространство. Время

«Что такое время, пространство, место и движение, я не объясняю, так как это известно всем», — так пишет создатель классической механики Исаак Ньютон в книге «Математические основы естествознания», более известной в русском переводе под названием «Математические начала натуральной философии». Действительно, у каждого человека с детства на основе личного жизненного опыта вырабатываются определенные интуитивные представления об этих простейших на первый взгляд понятиях. Однако чем больше человек узнает об окружающем мире, тем яснее ему становится, что понятия пространства и времени относятся к числу наиболее глубоких. Фундаментальность этих понятий заключается в том, что их невозможно выразить, объяснить через какие-либо более простые понятия.

Для изучения законов природы важны не формальные определения, что такое пространство и время, а их *свойства*, познаваемые на опыте. Опыт говорит о том, что физическое пространство трехмерно, однородно и изотропно, а время — одномерно и однородно.

Одномерность времени проявляется в том, что для указания момента наступления какого-либо события или длительности какого-либо процесса достаточно одного числа.

Однородность времени проявляется в неизменности физических законов: какими они были во времена Ньютона, такими остаются в наши дни, такими же будут и завтра. При этом совершенно не важно, что какие-то законы еще не открыты человеком — в природе они действовали, действуют и будут действовать. Опыт, поставленный в одинаковых физических условиях в разные моменты времени, дает одинаковые результаты.

Трехмерность физического пространства проявляется в том, что для указания места, где происходит какое-либо событие, доста-

точно трех чисел — трех пространственных координат. Точно так же трех чисел достаточно для указания относительного расположения двух точек: можно, например, задать расстояние между ними (для чего требуется одно число) и направление соединяющей их прямой (для чего нужны еще два числа).

Однородность физического пространства проявляется в независимости физических законов от положения: одни и те же законы действуют во всех уголках Вселенной. Опыт, поставленный в одинаковых физических условиях в разных местах, дает одинаковые результаты.

Изотропность физического пространства проявляется в независимости физических законов от ориентации физической системы в пространстве.

При обсуждении свойств пространства и времени нами использовалось слово «событие», смысл которого интуитивно был ясен. Для описания явлений природы удобно ввести соответствующее физическое понятие: под *событием* будем понимать нечто, характеризуемое пространственным положением и моментом времени, т. е. тем, где и когда это «нечто» произошло. Таким образом, событие характеризуется указанием четырех чисел: трех пространственных и одной временно́й координат.

Примерами физических событий могут служить мгновенная вспышка света в определенной точке, столкновение двух элементарных частиц и т. д. Любой физический процесс или явление можно рассматривать как некую последовательность или совокупность отдельных событий.

Физическое понятие события подобно геометрическому понятию точки как объекта, не имеющего пространственной протяженности. Аналогично, отдельное физическое событие не имеет ни пространственной, ни временной протяженности.

- В тексте утверждалось, что для указания момента времени требуется только одно число. Как это согласуется с тем, что при ответе на вопрос «когда вы родились?» приходится называть год, месяц и число?
- На пути из Москвы в Санкт-Петербург на автомобиле для определения своего местоположения достаточно указать, на каком километре шоссе вы находитесь. Как это согласовать с тем фактом, что для указания пространственного положения требуются три числа?

△ **Свойства симметрии.** Однородность времени, однородность и изотропность пространства отражают определенную *симметрию* физического мира.

Однородность пространства связана с симметрией по отношению к преобразованию сдвига, т. е. к параллельному переносу. Параллельный перенос физической системы как целого не влияет на характер протекающих в ней процессов. В этом проявляется эквивалентность, т. е. равноправие, всех точек физического пространства.

Изотропность пространства связана с симметрией по отношению к поворотам. Поворот всей системы как целого, как и параллельный перенос, не влияет на характер протекающих в ней процессов. В этом проявляется эквивалентность всех направлений в пространстве.

Однородность времени связана с симметрией по отношению к сдвигу во времени. Такой сдвиг также не влияет на характер процессов в физической системе. В этой симметрии проявляется эквивалентность всех моментов времени.

Отмеченные свойства симметрии физического мира не единственные. Существует также симметрия по отношению к отражению в плоскости, по отношению к преобразованию инверсии относительно точки, по отношению к отражению во времени. С последней из указанных симметрий связана *обратимость* физических явлений.

Представление об обратимости явлений можно получить из такого примера. Заснимем на кинопленку столкновение двух бильярдных шаров. При просмотре фильма пленку можно пускать в любом направлении. По наблюдаемой на экране картине невозможно определить, движется ли пленка в том же направлении, что и при съемке фильма, или в противоположном. В «обращенном» во времени движении никакие физические законы не нарушаются.

Соображения симметрии играют большую роль при объяснении свойств физического мира. ▲

- Если все точки физического пространства эквивалентны, то почему при взвешивании груза показания пружинных весов на полюсе и на экваторе различаются?
- Все ли процессы в природе обратимы? Приведите известные вам примеры обратимых процессов.

§ 2. Механическое движение. Система отсчета

Простейший вид движения — *механическое движение* — заключается в изменении пространственного положения тела с течением времени. Как определить положение тела в пространстве? Оказывается, это можно сделать, только указав его положение относительно каких-либо других тел. Не существует физического способа указать положение тела в пустом пространстве, где никаких других тел нет. Поэтому нельзя говорить и об изменении положения тела в пустом пространстве. Значит, механическое движение тела может происходить только относительно других тел. В этом заключается простейший смысл *относительности* механического движения.

Система отсчета. Будем называть *телом отсчета* некоторое тело, условно принимаемое за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел. Например, движение людей, ав-

томобилей, самолетов удобно рассматривать относительно Земли, считая ее неподвижной. В свою очередь, движение Земли и других планет удобно рассматривать относительно Солнца, выбирая его в

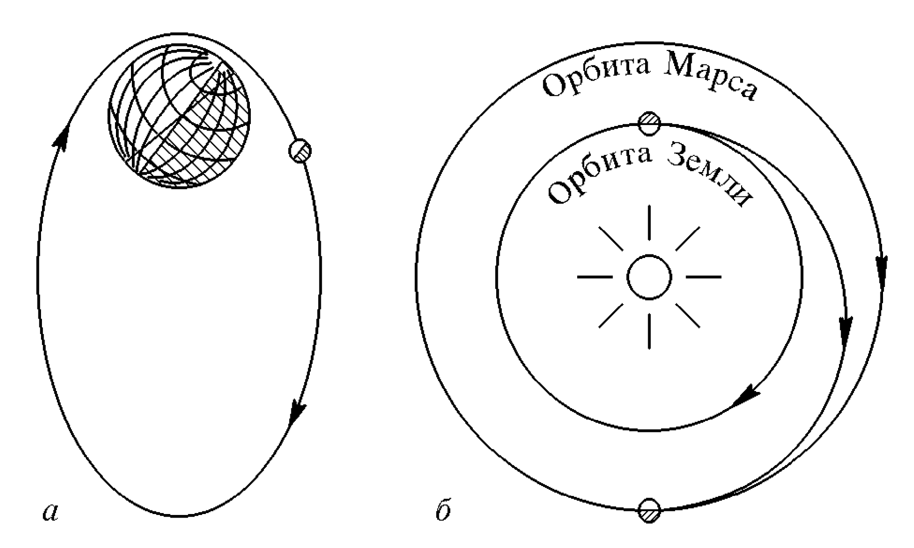


Рис. 1. Спутник на околоземной орбите (*а*). Автоматическая станция на пути к Марсу (*б*)

качестве тела отсчета. Движение космических аппаратов по околоземным орбитам удобно рассматривать относительно Земли, а при межпланетных полетах — относительно Солнца (рис. 1).

Чтобы указать положение движущегося тела и изменение этого положения со временем, т. е. описать механическое движение, необходимо уметь измерять промежутки времени и расстояния. Тело отсчета вместе с совокупностью приборов для измерения времени и расстояний называют *системой отсчета.*

Любое механическое движение рассматривается в какой-либо системе отсчета. Одно и то же движение можно рассматривать в разных системах отсчета. Относительность механического движения проявляется в том, что одно и то же движение с точки зрения

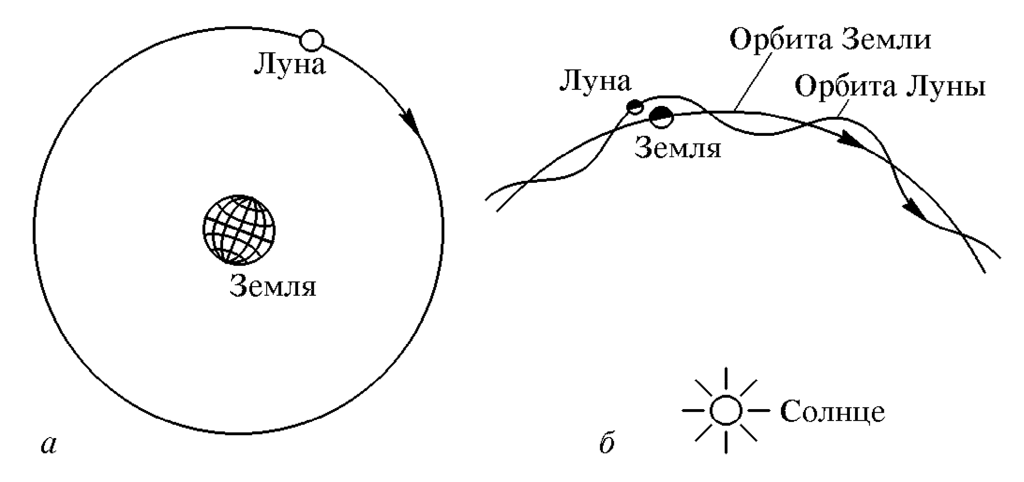


Рис. 2. Движение Луны относительно Земли (*а*). Движение Земли и Луны относительно Солнца (*б*)

разных систем отсчета происходит по-разному. Например, движение Луны относительно Земли (в так называемой геоцентрической

системе отсчета) происходит по замкнутой почти круговой орбите. Но относительно Солнца (т. е. в гелиоцентрической системе отсчета) Луна движется по сложной незамкнутой орбите (рис. 2). Масштаб на рисунке не соблюден. В частности расстояние Луна—Земля сильно преувеличено. В действительности орбита Луны относительно Солнца везде (а не только в среднем) обращена в сторону от Солнца.

- Как вы думаете, чем следует руководствоваться при выборе той или иной системы отсчета для описания некоторого движения? Поясните свою мысль примерами.
- Мальчик в вагоне движущегося поезда подбрасывает вверх мячик и ловит его, не сходя с места. Каким представляется это движение мяча наблюдателю, стоящему на платформе железнодорожной станции, мимо которой проходит поезд?

△ **Объективное и субъективное в законах природы.** Физика изучает объективные закономерности окружающего мира, не зависящие от того, кто именно их изучает. Но описание механического движения требует некоторой системы отсчета, которую можно выбирать произвольно. Каждый исследователь может выбрать систему отсчета по-своему. Тем самым в изучение движения вносится некоторый субъективный момент. В действительности этот произвол ограничивается соображениями целесообразности и удобства: систему отсчета всегда следует выбирать так, чтобы изучаемое движение и его закономерности выглядели как можно проще. Например, в системе Коперника закономерности движения планет Солнечной системы оказываются значительно проще, чем в системе Птолемея, хотя для земного наблюдателя движение планет выглядит именно так, как оно описывается в системе Птолемея.

Отмеченное обстоятельство характерно для всех естественных наук, т. е. наук о природе. На первый взгляд кажется, что у природы можно непосредственно «выведать» гораздо больше, чем это возможно на самом деле. В действительности целый ряд понятий не познается, а *определяется* для познания природы. В частности, приходится вводить по определению систему отсчета, чтобы с ее помощью изучать объективные закономерности механического движения. ▲

- Как согласовать разный вид одного и того же механического движения в разных системах отсчета с объективным характером этого движения?
- Приведите известные вам примеры вводимых по определению понятий, которые используются для изучения объективных закономерностей физических явлений.

§ 3. Материальная точка. Поступательное движение

Любое тело имеет конечные размеры. Поэтому разные его части занимают разные положения в пространстве. Рассмотрим сначала простейший случай, когда достаточно указать положение лишь одной какой-либо точки тела. Когда же это возможно?

Во-первых, это возможно, когда размеры и форма тела в рассматриваемом движении несущественны и их можно не принимать во внимание. Например, при описании полета пули к мишени нет необходимости учитывать размеры пули. Ее можно считать одной «частицей», положение которой в пространстве задается как положение одной точки. Таким образом, мы приходим к понятию *материальной точки*, понимая под этим тело, размеры и форма которого в рассматриваемом явлении несущественны.

Одно и то же тело в одних условиях можно считать материальной точкой, а в других — нельзя. Например, при расчете движения космического корабля по орбите его считают материальной точкой, но при проведении маневров сближения с орбитальной станцией и стыковки с ней необходимо учитывать конечные размеры корабля (рис. 3).

В каких ситуациях размеры тела несущественны? Как правило, когда они малы по сравнению с другими характерными размерами, которые фигурируют в изучаемом явлении. При полете межпланетной станции к Марсу его можно считать материальной точкой, пока расстояние от станции до Марса велико по сравнению с его размерами. Но при подлете к Марсу и посадке станции на марсианскую поверхность размеры планеты уже не малы по сравнению с расстоянием до нее и уже не может быть и речи о том, чтобы считать Марс материальной точкой.

Другой случай, когда достаточно рассматривать лишь одну точку движущегося тела, — это так называемое *поступательное движение*, при котором все точки тела движутся одинаково и его пространственная ориентация остается неизменной. Например, при операции стыковки космического корабля с орбитальной станцией, когда корабль уже сориентирован и его пространственная ориентация поддерживается неизменной, все точки корабля движутся одинаково. Причаливающий корабль можно рассматривать как материальную точку, хотя его размеры отнюдь не малы по сравнению с другими характерными размерами — расстоянием до станции, ее габаритами и т. д.

- Можно ли считать материальной точкой тяжелый шар, подвешенный на упругой проволоке, если шар совершает: а) вертикальные колебания, при которых проволока слегка растягивается и укорачивается; б) крутильные колебания, при которых проволока закручивается на небольшой угол в одну и в другую сторону?

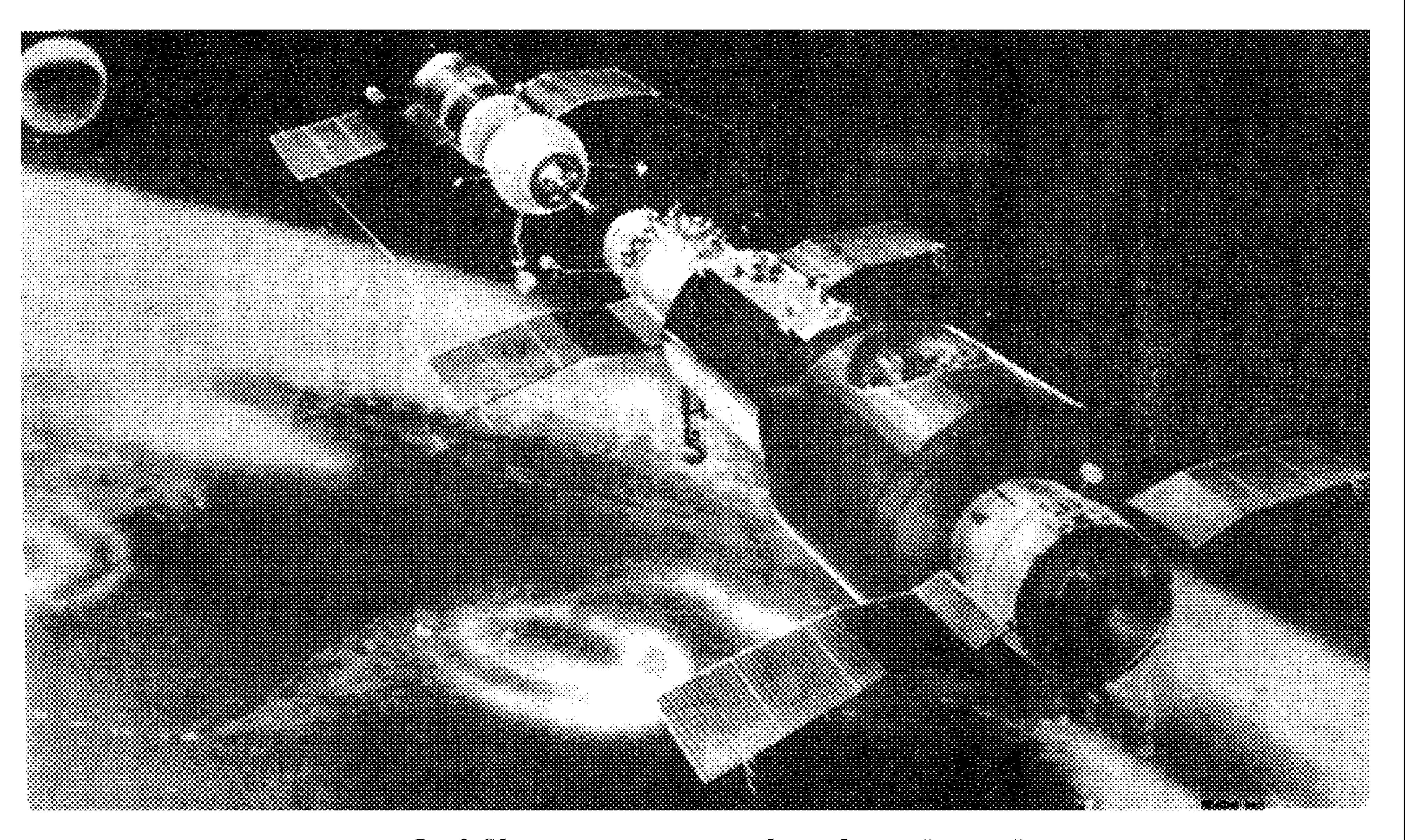


Рис. 3. Сближение космического корабля с орбитальной станцией

- Можно ли океанский лайнер считать материальной точкой: а) при прокладке его курса на штурманской карте; б) при маневрировании у входа в узкий шлюз?
- Можно ли считать материальной точкой санки, которые мальчик тянет за веревку?

△ **Физическая модель.** На примере понятия материальной точки мы впервые сталкиваемся с *физической моделью.* Из-за сложности физического мира, изучая реальное явление, мы всегда вынуждены упрощать его и вместо самого явления рассматривать некоторую идеализированную его модель, стремясь к тому, чтобы в выбранной модели сохранить самые характерные, наиболее важные черты явления. По образному выражению Я. И. Френкеля, физики фактически всегда рассматривают не само явление, а некоторую упрощенную схему, т. е. как бы карикатуру на него. При этом успех зависит от того, насколько удачна выбранная модель.

Материальная точка может служить простейшим примером физической модели в механике: вместо всего тела рассматривают движение одной его точки. В дальнейшем мы встретимся и с другими моделями — абсолютно твердым телом, идеальной жидкостью и т. д. Применимость той или иной физической модели зависит не только от свойств реальной системы, но и от характера поставленной задачи. В частности, используя понятие материальной точки, мы идеализируем не столько свойства самого тела, сколько условия его движения.

Развивая эту мысль дальше, можно прийти к выводу о том, что и само механическое движение является физической моделью, т. е. некоторой идеализацией явлений природы. Даже в таком классическом примере механических явлений, как столкновение биллиардных шаров, в игру вступают силы упругости, которые по сути представляют собой проявление электромагнитного взаимодействия между атомами, из которых построены сталкивающиеся шары. В этом смысле можно сказать, что чисто механических явлений в природе не существует. ▲

- Какие свойства тела не принимаются во внимание, когда для него используется модель материальной точки?
- В небесной механике движение планет Солнечной системы описывается на основе законов Ньютона и закона всемирного тяготения. Значит ли это, что такая механическая модель адекватна физической природе данного объекта и дает его исчерпывающее описание?

§ 4. Радиус-вектор. Перемещение

В выбранной системе отсчета положение материальной точки, которую для краткости будем называть *частицей*, можно задать направленным отрезком, проведенным из начала отсчета в ту точку пространства, где находится частица. Такой направленный отрезок называется *радиусом-вектором* частицы. Начало отсчета — это некоторая фиксированная точка тела отсчета, выбор которой произволен и определяется исключительно из соображений удобства (рис. 4).

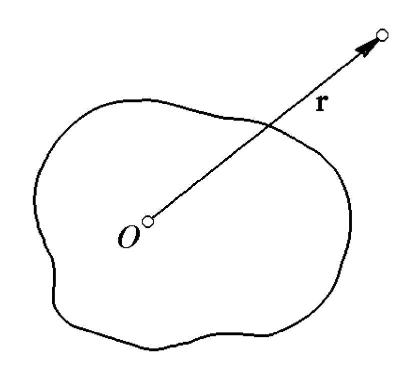


Рис. 4. Начало отсчета (точка O) и радиус-вектор материальной точки

Траектория. При движении частицы, т. е. при изменении ее положения, конец радиуса-вектора перемещается в пространстве вместе с частицей. Вычерчиваемая им при этом воображаемая линия называется *траекторией* частицы. В некоторых случаях траекторию движения можно наблюдать непосредственно: в голубом небе часто отчетливо виден белый инверсионный след реактивного самолета; быстро мчащийся катер оставляет пенистый след на поверхности воды; заряженная частица оставляет за собой цепочку капелек тумана в камере Вильсона (рис. 5).

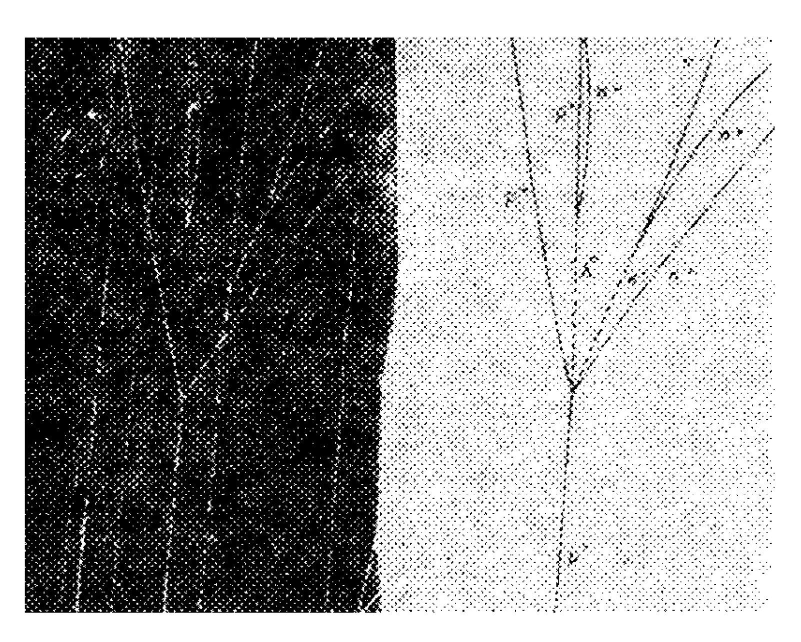


Рис. 5. Треки частиц в камере Вильсона

Отметим, что в выбранной системе отсчета радиус-вектор движущейся частицы изменится, если изменить начало отсчета. Однако траектория частицы, т. е. вычерчиваемая ею воображаемая линия, при этом не изменится.

Пусть в некоторый момент времени t_1 положение частицы задается радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$, а в более поздний момент t_2 — радиу-

сом-вектором $\mathbf{r}_2$ (рис. 6). Направленный отрезок, проведенный из конца радиуса-вектора $\mathbf{r}_1$ в конец радиуса-вектора $\mathbf{r}_2$, называется *перемещением* частицы за промежуток времени $t_2 - t_1$.

В еще более поздний момент времени t_3 положение частицы определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}_3$. В соответствии с введенным определением перемещением частицы за промежуток времени

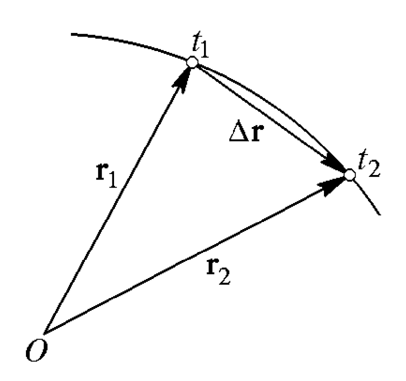


Рис. 6. Перемещение частицы за промежуток времени $t_2 - t_1$

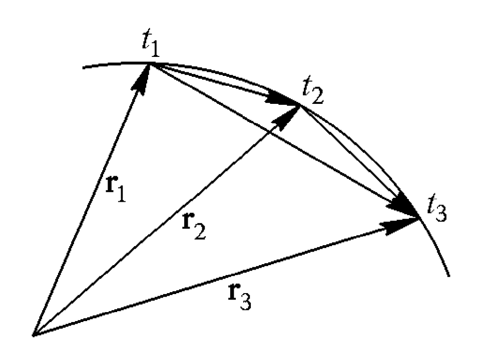


Рис. 7. Перемещение частицы за промежутки времени $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$ и $t_3 - t_1$

$t_3 - t_2$ будет направленный отрезок, проведенный из конца радиуса-вектора $\mathbf{r}_2$ в конец радиуса-вектора $\mathbf{r}_3$. Аналогично, перемещением за весь промежуток времени $t_3 - t_1$ будет направленный отрезок, проведенный из конца $\mathbf{r}_1$ в конец $\mathbf{r}_3$ (рис. 7).

Сложение векторов. Как связаны между собой перемещения частицы за указанные промежутки времени? Будем говорить, что перемещение за весь промежуток времени $t_3 - t_1$ равно сумме перемещений на составляющих его промежутках $t_2 - t_1$ и $t_3 - t_2$. Из рис. 7

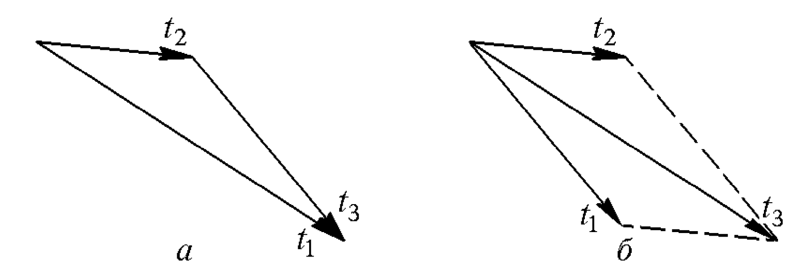


Рис. 8. Правило сложения перемещений (*а*). Сложение векторов по правилу параллелограмма (*б*)

видно, что соответствующие направленные отрезки образуют треугольник. Этот треугольник показан отдельно на рис. 8. Он иллюстрирует *правило сложения перемещений*. В математике по такому закону складываются величины, называемые *векторами*. Вектор характеризуется своим *модулем*, равным длине соответствующего направленного отрезка, и *направлением* в пространстве.

Сложение векторов можно выполнять как по правилу треугольника (рис. 8*а*), когда начало второго вектора примыкает к концу первого, а сумма замыкает образуемый ими треугольник, так и по правилу параллелограмма (рис. 8*б*), построенного на складываемых векторах. В этом случае сумма изображается диагональю параллелограмма. Для выполнения сложения по правилу параллелограмма второй из складываемых векторов нужно изобразить выходящим из той же точки, что и первый, сохранив его модуль и направление. Правило треугольника особенно удобно применять, когда приходится последовательно складывать большое число векторов. В этом случае достаточно лишь соединить начало первого из складываемых векторов с концом последнего (рис. 9).

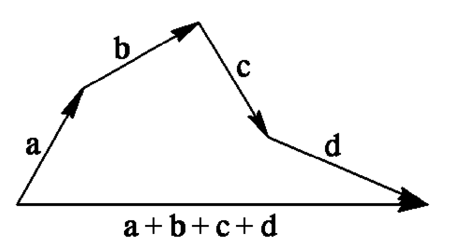


Рис. 9. Сложение большого числа векторов

Итак, перемещение — это вектор: два последовательных перемещения частицы эквивалентны одному перемещению, равному их векторной сумме. Рассчитать модуль и направление результирующего перемещения можно по известным правилам геометрии. Векторы обозначаются стрелкой над соответствующей буквой либо набираются жирным шрифтом. Модуль вектора обозначается той же буквой без стрелки либо тонким (обычным) шрифтом.

- Вы делаете три шага на север, а затем четыре шага на восток. Чему равен модуль результирующего перемещения, т. е. сумма этих семи шагов?
- Докажите, что модуль суммы двух перемещений не превосходит суммы модулей составляющих перемещений. В каком случае модуль суммы равен сумме модулей слагаемых перемещений?
- Как найти сумму трех последовательных перемещений? Обобщите сложение векторов по правилу треугольника на случай нескольких перемещений.
- Докажите, что результат сложения перемещений не зависит от последовательности, в которой происходят эти перемещения.

§ 5. Одновременные перемещения. Сложение перемещений

Мы знаем, как складываются перемещения, происходящие последовательно. А как складываются перемещения, когда тело одновременно участвует в нескольких движениях? Рассмотрим следующий пример. Паром переправляет пассажиров с одного берега фиорда на другой. Стоящий в его левом углу пассажир совершает вместе с паромом перемещение **a** относительно берегов и попадает из точки A в точку A_1 (рис. 10*а*). Если бы паром стоял на месте,

а человек пересек бы его наискосок, то он совершил бы относительно берегов перемещение **b** и попал бы из точки A в точку A_2 (рис. 10*б*). А теперь рассмотрим такую ситуацию: паром пересекает фиорд, а человек в это время пересекает паром наискосок.

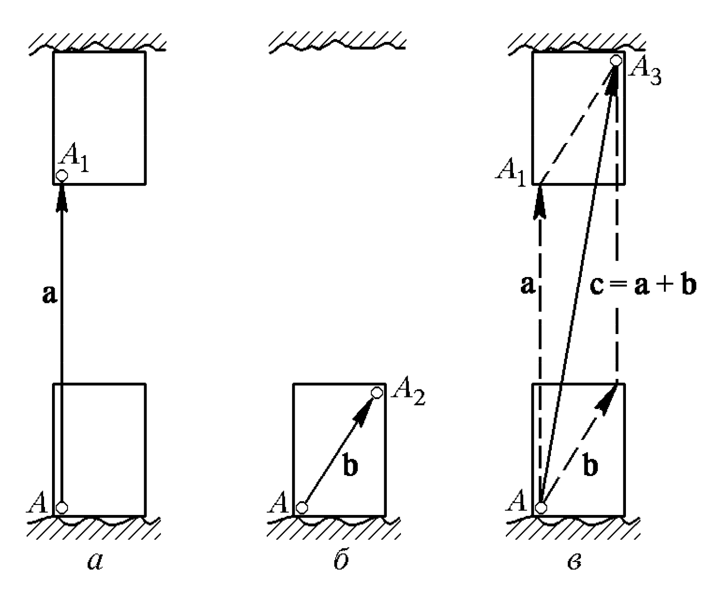


Рис. 10. Пример сложения одновременных перемещений (переправа на пароме)

Где он окажется в результате одновременного участия в этих двух движениях? Опыт показывает, что человек попадет в точку A_3, т. е. совершит относительно берегов перемещение **c**, равное сумме векторов **a** и **b**: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 10*в*). В физике это утверждение иногда называют принципом независимости перемещений.

Независимость перемещений. Такой же результат получится и в случае, когда сначала паром пересечет фиорд и только после его причаливания пассажир пересечет паром наискосок, и в случае, когда сначала человек пересечет наискосок неподвижный паром и только затем паром переправит его на другой берег. Во всех этих случаях человек попадет в одну и ту же точку A_3. Его результирующее перемешение относительно берегов будет одним и тем же независимо от последовательности выполнения отдельных составляющих перемещений. С математической точки зрения это означает, что векторное сложение перемещений коммутативно — его результат не зависит от порядка слагаемых: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Задача

Переправа на пароме. Ширина фиорда $s = 300$ м. Квадратный паром со стороной $l = 40$ м переправляется поперек фиорда. За время переправы пассажир, двигаясь из точки A (рис. 11) наискосок парома, успевает дойти до его середины. Найдите перемещение пассажира относительно берегов.

Решение. Если бы паром стоял на месте, то перемещение пассажира изображалось бы вектором **b**, проведенным из угла A квадрата в его центр (рис. 11). Очевидно, что он направлен под углом 45° к берегу, а его модуль

равен $l/\sqrt{2}$. Перемещение самого парома изображается вектором **a**, перпендикулярным берегу. Его модуль $a = s - l$.

Результирующее перемещение пассажира изображается вектором **c**, проведенным по диагонали параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**. Из рис. 11 видно, что его модуль проще находить не как длину диагонали, а как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $l/2$ и $a + l/2 = s - l/2$. По теореме Пифагора

$$c = \sqrt{(l/2)^2 + (s - l/2)^2} \approx 280{,}7 \text{ м}$$

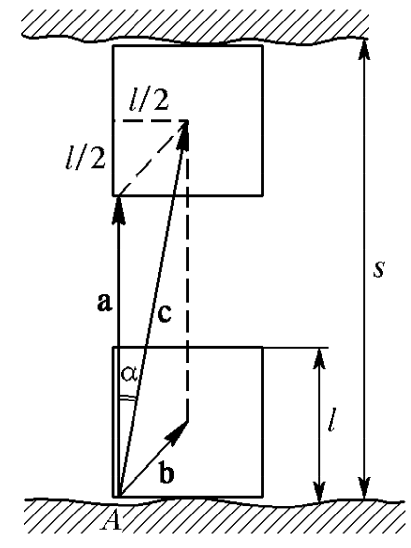


Рис. 11. Сложение перемещений при переправе на пароме

Направление вектора **c** можно определить, вычислив значение синуса угла α (рис. 11), образуемого вектором **c** и перпендикуляром к береговой линии:

$$\sin\alpha = \frac{l/2}{c} = 0{,}07.$$

Поскольку $\sin\alpha \ll 1$, то его значение приближенно совпадает с самим углом α в радианной мере. Умножая это значение на $180°/\pi$, находим $\alpha = 4°$.

- Приведите примеры сложения перемещений, когда тело одновременно участвует в нескольких движениях.
- Зависит ли результат сложения трех и большего числа перемещений от последовательности, в которой производится их сложение? Проверьте ваш ответ на каком-либо конкретном примере.

△ **Геометрия и опыт**. Зачем нужна была ссылка на опыт при утверждении, что результирующее перемещение тела, участвующего в двух движениях, равно векторной сумме составляющих перемещений? Разве это не очевидно с самого начала? Когда мы говорим о сложении векторов, то имеем в виду правила действий, определяемые в евклидовой геометрии. Опыт, о котором идет речь, фактически служит проверкой того, что геометрия реального физического пространства является евклидовой.

Нужно ли проверять на опыте справедливость евклидовой геометрии? Правильность математической теории, в частности геометрии Евклида, определяется ее внутренней непротиворечивостью, устанавливаемой чисто логическим путем. Ссылки на опыт здесь не нужны. В противоположность «чистой» математике, где величины по определению обладают теми свойствами, которые им произвольно приписаны, в физике необходимо не приписывать, а экспериментально открывать отдельные объективно существующие свойства.

Физические величины определяются прежде всего по тем признакам, по которым мы распознаем их, сталкиваясь с ними при наблюдении окружающего мира. Вместо абстрактных гео-

метрических понятий точки, прямой линии и т. д. в физике приходится иметь дело с их материальными воплощениями. Например, прямой линии сопоставляется луч света — узкий световой пучок.

Геометрические представления имеют для физики принципиальное значение. С ними связан вопрос о физических свойствах реального мира: можно ли в физических измерениях предполагать, что справедливы аксиомы и теоремы евклидовой геометрии? Такой вопрос не возникал, пока геометрия Евклида была единственной известной геометрией и ее применимость к физическому пространству считалась самоочевидной. Однако уже в XIX веке выяснилось, что возможно существование и других геометрий, основанных на наборах аксиом, отличных от аксиом, на которых зиждется геометрия Евклида.

Искривленное пространство. Для того чтобы понять, в чем могут заключаться отличия геометрии пространства от евклидовой геометрии, вообразим себе, каким представлялся бы мир гипотетическим разумным двумерным существам, живущим во вселенной, которая представляет собой поверхность шара. Трехмерное пространство, в котором находится этот шар, им так же трудно себе представить, как нам — четырехмерное пространство.

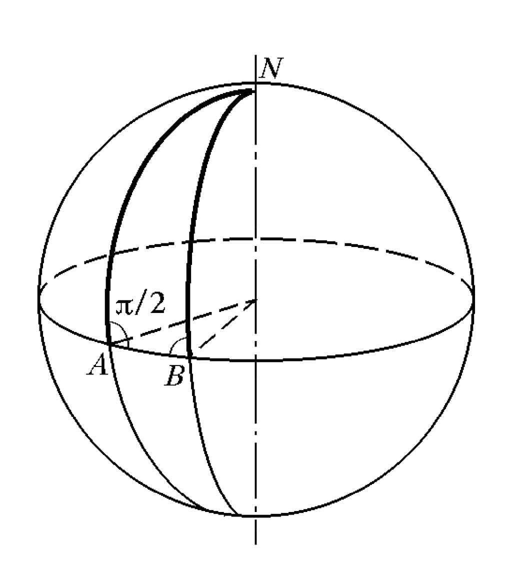


Рис. 12. В сферическом треугольнике NAB сумма углов превышает π

Что представляет собой геометрия искривленного двумерного пространства, в котором они живут? Аналогом прямых линий служат дуги больших кругов, так как именно они реализуют кратчайшее расстояние на поверхности шара между двумя ее точками: вообразим себе нить, натянутую между двумя точками на глобусе. Из таких «прямых» можно строить треугольники. Легко убедиться в том, что сумма углов в таких треугольниках всегда больше π. Проще всего это увидеть для треугольника, одна из сторон которого представляет собой часть экватора (AB на рис. 12), а две другие стороны — части меридианов.

Могут ли наши воображаемые существа установить отличие геометрии своего двумерного мира от евклидовой, не «выходя» за его пределы, т. е. в трехмерное пространство? Ответ очевиден: конечно, могут, для этого им достаточно выполнить тщательное измерение углов какого-либо треугольника и убедиться, что сумма этих углов не равна π.

В геометрии искривленного двумерного мира сумма двух последовательных перемещений зависит от порядка слагаемых. Например, на глобусе из некоторой точки экватора пройдем расстояние, равное одной пятой части меридиана, сначала на север, а затем на восток. Если же сначала пройти такое расстояние на восток, а потом повернуть на север, то в итоге мы попадем в совершенно другую точку глобуса.

Трехмерное пространство, как и рассмотренное двумерное, также может быть искривленным, описываемым неевклидовой геометрией. Поэтому только на опыте может быть решен вопрос о том, какова геометрия реального трехмерного физического пространства. Первым это осознал гениальный немецкий ученый Карл Фридрих Гаусс, который еще в 1821—1823 гг. предпринял попытки с помощью геодезических приборов найти сумму углов треугольника, образованного удаленными вершинами трех гор. Ни в этих, ни во всех последующих экспериментах отклонения геометрии физического пространства от евклидовой не было обнаружено.

- Будет ли для прямоугольного треугольника на двумерной искривленной поверхности справедлива теорема Пифагора?
- При каких условиях нашим двумерным существам было бы трудно обнаружить на опыте искривление своего пространства?
- Мы живем на поверхности земного шара, т. е. фактически в тех же условиях, что и наши воображаемые двумерные существа. Как же мы можем утверждать, что геометрия реального физического пространства евклидова? ▲

§ 6. Средняя скорость

Вернемся к рис. 6, где было введено понятие радиуса-вектора и траектории. Видно, что радиус-вектор $\mathbf{r}_2$, соответствующий положению частицы в момент времени t_2, равен векторной сумме радиуса-вектора $\mathbf{r}_1$, соответствующего положению частицы в момент t_1, и вектора перемещения за промежуток времени $t_2 - t_1$. Обозначив это перемещение через $\Delta\mathbf{r}$, можем написать

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}. \qquad (1)$$

С равенствами, содержащими в качестве своих членов векторы, можно обращаться по тем же правилам, что и с равенствами, содержащими обычные числа. В частности, отдельные слагаемые можно переносить в другую часть равенства, изменяя перед ними знак на противоположный. Знак «минус» перед обозначением некоторого вектора (т. е. умножение на -1) означает, что его направление изменяется на противоположное.

Вектор средней скорости. Перенесем в равенстве (1) $\mathbf{r}_1$ в левую часть. Тогда

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}.$$

Таким образом, перемещение $\Delta\mathbf{r}$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ можно рассматривать как разность радиусов-векторов частицы в моменты t_2 и t_1. Отношение перемещения $\Delta\mathbf{r}$ к промежутку времени Δt, в течение которого оно произошло, называется *средней скоростью* на промежутке Δt:

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (2)$$

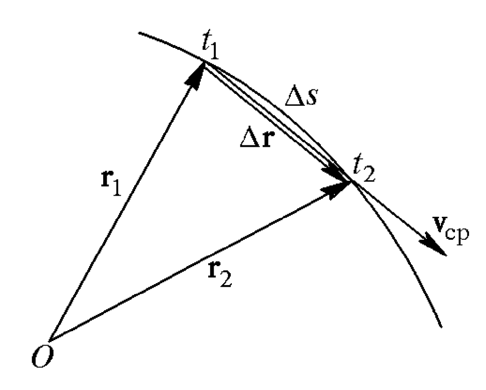


Рис. 13. Вектор средней скорости за промежуток времени $t_2 - t_1$

Вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ направлен в ту же сторону, что и перемещение $\Delta\mathbf{r}$, так как $\Delta t > 0$ — момент времени t_2 по определению более поздний, нежели t_1. Длина отрезка, изображающего вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ на рис. 13, никак не связана с длиной вектора $\Delta\mathbf{r}$. Эти физические величины, как говорят, имеют разную *размерность*, и длины соответствующих векторов измеряются в совершенно разных единицах: $\Delta\mathbf{r}$ — в метрах, а $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ — в метрах в секунду. Поэтому и масштабы для изображения длин и скоростей выбираются независимо.

Средняя скорость характеризует быстроту, с которой совершается перемещение. Эта характеристика движения относится к определенному промежутку времени. Поэтому даже для одного и того же движения она может быть совершенно различной, если выбирать разные промежутки времени. Например, средняя скорость бегуна на длинную дистанцию равна нулю, если ее определять за время пробегания целого круга стадиона, и отлична от нуля за половину круга. Так будет и в том случае, когда спортсмен бежит равномерно.

Пройденный путь. Обращение в нуль средней скорости за целое число кругов связано с векторным характером этой физической величины. Наряду с ней рассматривают и среднюю скорость прохождения траектории. Будем называть пройденным частицей *путем* длину Δs отрезка траектории между двумя ее последовательными положениями. Путь — это скалярная положительная величина.

Сравним между собой пройденный за некоторый промежуток времени путь Δs с модулем перемещения Δr за то же время. В случае *криволинейной* траектории путь больше модуля соответствующего перемещения, так как длина дуги всегда больше длины стягивающей ее хорды (рис. 13). Путь и модуль перемещения совпадают только при прямолинейном движении в одном направлении.

Средняя скорость прохождения пути определяется как отношение пройденного пути к соответствующему промежутку времени:

$$(v_s)_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Именно эту физическую величину имеют в виду, когда говорят, например, что спортсмен пробежал дистанцию со средней скоростью 6,5 м/с.

Задачи

1. *Средняя скорость на всем пути.* Первую половину пути автомобиль прошел со средней скоростью $v_1 = 40$ км/ч, вторую половину пути — со средней скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Чему равна средняя скорость за весь путь?

Решение. Первым побуждением может быть желание сложить эти средние скорости и поделить сумму пополам, что дало бы значение 50 км/ч. Однако это неверно! По определению (3) для нахождения $(v_s)_{\text{ср}}$ нужно весь путь s поделить на полное время движения t:

$$(v_s)_{\text{ср}} = \frac{s}{t}.$$

Автомобиль по-разному движется на двух одинаковых половинах пути и потому проходит их за разные промежутки времени t_1 и t_2. Полное время движения $t = t_1 + t_2$. Очевидно, что t_1 и t_2 можно выразить через средние скорости v_1 и v_2 прохождения первой и второй половин пути:

$$t_1 = \frac{s/2}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s/2}{v_2}.$$

Подставляя полное время движения в исходное выражение для средней скорости, находим

$$(v_s)_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 48 \text{ км/ч}.$$

2. *Средняя скорость за все время.* В течение первого часа движения средняя скорость автомобиля составила $v_1 = 40$ км/ч, а в течение второго часа $v_2 = 60$ км/ч. Чему равна средняя скорость за все время движения?

Решение. Средняя скорость и здесь, разумеется, определяется той же формулой (3): $(v_s)_{\text{ср}} = s/t$. Но в данном случае время движения на каждом участке одинаково и составляет половину полного времени движения t. Пути s_1 и s_2, проходимые автомобилем, будут различными:

$$s_1 = v_1 \frac{t}{2}, \quad s_2 = v_2 \frac{t}{2}.$$

Подставляя в выражение для средней скорости полный путь $s = s_1 + s_2$, находим

$$(v_s)_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 50 \text{ км/ч}.$$

В этом случае значение средней скорости оказывается равным среднему арифметическому скоростей на отдельных участках.

- Сформулируйте правило, по которому геометрически можно находить разность двух векторов.
- В каком случае при прямолинейном движении пройденный путь не будет совпадать с модулем перемещения? Которая из этих величин при этом больше? Во сколько раз могут они отличаться?

Задачи для самостоятельного решения

1. Десятую часть пути автомобиль прошел со средней скоростью 40 км/ч, а остальной путь — со средней скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость за весь путь.

2. Полчаса автомобиль двигался со средней скоростью 40 км/ч, а следующие полтора часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость за все время движения.

3. Десятую часть пути автомобиль прошел за полчаса, а оставшиеся 45 км — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля за весь путь.

§ 7. Скорость

Средняя скорость частицы характеризует быстроту ее движения за конечный промежуток времени. Неограниченно уменьшая этот промежуток, мы придем к физической величине, характеризующей быстроту движения в данный момент времени. Такая величина называется *мгновенной скоростью* или просто *скоростью*:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

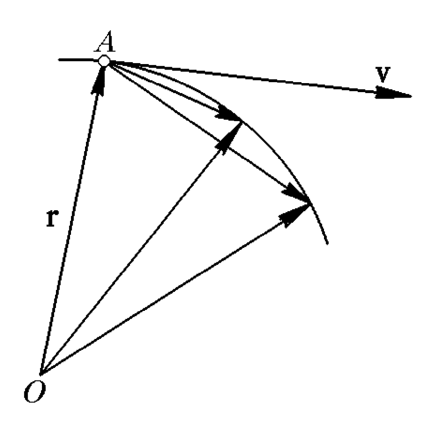


Рис. 14. Вектор скорости в точке A направлен по касательной к траектории

Символ lim обозначает математическую операцию перехода к пределу. Под этим символом записывается условие, при котором выполняется данный предельный переход; в рассматриваемом случае это стремление к нулю промежутка времени Δt: $\Delta t \to 0$.

При вычислении скорости по этому правилу мы убедимся, что уменьшение промежутка времени Δt приводит к тому, что на некотором этапе получаемые очередные значения средней скорости будут все меньше и меньше отличаться друг от друга. Поэтому на практике при нахождении скорости можно остановиться на конечном значении Δt, достаточно малом для получения требуемой точности значения скорости.

Вектор скорости и траектория. Рассматриваемый предельный переход имеет ясный геометрический смысл. Поскольку вектор пере-

мещения $\Delta\mathbf{r}$ направлен по хорде, соединяющей две точки траектории, то при сближении этих точек, происходящем при $\Delta t \to 0$, он принимает положение, соответствующее касательной к траектории в данной точке. Это значит, что вектор скорости направлен *по касательной* к траектории. Так будет в любой точке траектории (рис. 14). При прямолинейной траектории движения вектор скорости направлен вдоль этой прямой.

Скорость прохождения пути. Аналогичным переходом определяется мгновенная *скорость прохождения пути*:

$$v_s = \lim_{\Delta t \to 0} (v_s)_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Для плавной кривой, каковой является траектория любого непрерывного механического движения, длина дуги тем меньше отличается от длины стягивающей ее хорды, чем короче эта дуга. В пределе эти длины совпадают. Поэтому при $\Delta t \to 0$ можно считать, что $\Delta s \to \Delta r$. Это означает, что скорость v_s прохождения пути равна модулю мгновенной скорости v: $v_s = v$. Движение, при котором модуль скорости остается неизменным, называется равномерным. В случае прямолинейной траектории при равномерном движении вектор скорости постоянен, а в случае криволинейной траектории изменяется только его направление.

Сложение скоростей. Если тело одновременно участвует в нескольких движениях, то его скорость равна векторной сумме скоростей каждого из этих движений. Это непосредственно следует из правила сложения перемещений: так как $\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2$, то после деления на Δt получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \qquad (3)$$

Иногда бывает удобно представить некоторое сложное движение как суперпозицию, т. е. наложение двух простых движений. В этом случае равенство (3) можно трактовать как правило разложения вектора скорости на составляющие.

Задачи

1. *Переправа через реку.* Скорость течения в реке с параллельными берегами всюду одинакова и равна v_1. Ширина реки l (рис. 15). Катер может плыть со скоростью v_2 относительно воды. На какое расстояние s снесет катер вниз по течению реки, если при переправе нос катера направить строго поперек берегов?

Решение. Катер участвует одновременно в двух движениях: со скоростью v_2, направленной поперек течения, и вместе с водой со скоростью v_1, которая направлена параллельно берегу. В соответствии с правилом сложения скоростей (3) полная скорость $\mathbf{v}$ катера относительно берегов равна век-

торной сумме $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ (рис. 16). Очевидно, что движение катера происходит по прямой AC, направленной вдоль вектора $\mathbf{v}$. Искомое рассто-

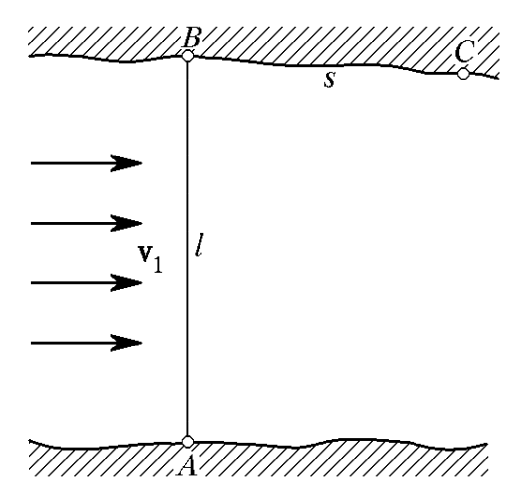


Рис. 15. Переправа через реку, скорость течения которой всюду равна v_1

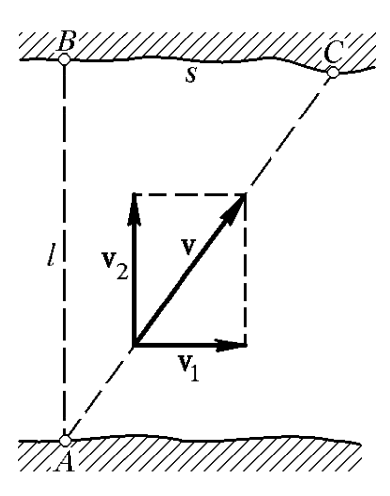


Рис. 16. Сложение скоростей при переправе через реку

яние s, на которое снесет катер при переправе, можно найти из подобия треугольника ABC треугольнику, образованному векторами скоростей:

$$\frac{s}{l} = \frac{v_1}{v_2},$$

откуда

$$s = l\,\frac{v_1}{v_2}.$$

Эту задачу легко решить и не прибегая к сложению векторов скоростей. Очевидно, что расстояние s равно произведению скорости течения v_1 на время t, в течение которого катер пересекает реку: $s_1 = v_1 t$. Это время можно найти, разделив ширину реки l на скорость v_2 движения катера поперек реки: $t = l/v_2$. Таким образом, находим

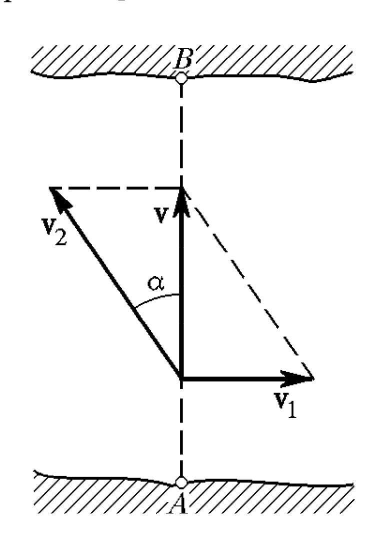


Рис. 17. Сложение скоростей при переправе поперек реки

$$s = v_1 t = l\,\frac{v_1}{v_2}.$$

В этой простой задаче второй способ решения предпочтительнее, так как он проще. Однако уже при небольшом усложнении условия задачи становятся отчетливо видны преимущества первого способа, основанного на сложении векторов скоростей.

2. *Переправа поперек реки.* Предположим, что теперь нам нужно переправиться на катере через ту же реку точно поперек, т. е. попасть в точку B, лежащую напротив начальной точки A (рис. 17). Как нужно направить нос катера при переправе? Сколько времени займет такая переправа?

Решение. В рассматриваемом случае полная скорость $\mathbf{v}$ катера относительно берегов, равная векторной сумме скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, должна быть

направлена поперек реки. Из рис. 17 сразу видно, что вектор $\mathbf{v}_2$, вдоль которого и смотрит нос катера, должен отклоняться на некоторый угол α вверх по течению реки от направления AB. Синус этого угла равен отношению модулей скоростей течения и катера относительно воды:

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2}. \quad (4)$$

Переправа поперек реки без сноса возможна только в том случае, когда скорость катера v_2 относительно воды больше скорости течения v_1. Это сразу видно либо из треугольника скоростей на рис. 17 (гипотенуза всегда больше катета), либо из формулы (4) (синус угла α должен быть меньше единицы).

Время переправы t найдем, разделив ширину реки l на полную скорость катера v: $t = l/v$. Для v по теореме Пифагора имеем $v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$. Таким образом,

$$v = \frac{l}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

3. *Снос при быстром течении.* Предположим теперь, что скорость катера относительно воды меньше скорости течения: $v_2 < v_1$. В таком случае переправа без сноса невозможна. Как следует направить нос катера при переправе, чтобы снос получился минимальным? На какое расстояние $s_{\min}$ при этом снесет катер?

Решение. Полная скорость $\mathbf{v}$ катера относительно берегов во всех рассматриваемых случаях дается формулой (3). Однако теперь нагляднее выполнить сложение векторов v_1 и v_2 по правилу треугольника (рис. 18): пер-

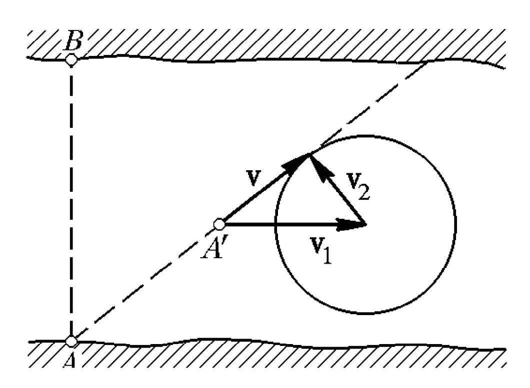


Рис. 18. Сложение скоростей при переправе с минимальным сносом

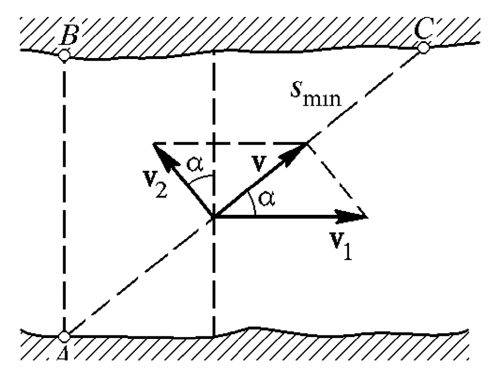


Рис. 19. Определение курса катера (направление вектора $\mathbf{v}_2$) для переправы с минимальным сносом

вым изображаем вектор $\mathbf{v}_1$, для которого мы знаем и модуль и направление, а затем к его концу пристраиваем начало вектора $\mathbf{v}_2$, для которого известен только модуль, а направление еще предстоит выбрать. Этот выбор нужно сделать так, чтобы вектор результирующей скорости $\mathbf{v}$ как можно меньше отклонялся от направления AB поперек реки.

Конец вектора $\mathbf{v}_2$ при любом его направлении должен лежать на окружности радиуса v_2, центр которой совпадает с концом вектора $\mathbf{v}_1$. Эта окружность показана на рис. 18. Так как по условию задачи $v_2 < v_1$, то точка A', соответст-

вующая началу вектора $\mathbf{v}_1$, лежит вне этой окружности. Из рисунка видно, что вектор $\mathbf{v}$ образует с прямой AB наименьший угол тогда, когда он направлен по касательной к окружности. Следовательно, вектор $\mathbf{v}_2$ перпендикулярен вектору $\mathbf{v}$, а треугольник скоростей — прямоугольный.

Таким образом, для переправы с минимальным сносом нос катера следует направлять вверх по течению под углом α к линии AB (рис. 19). Синус этого угла дается выражением

$$\sin\alpha = \frac{v_2}{v_1}.$$

Траектория катера направлена вдоль вектора $\mathbf{v}$, т. е. она перпендикулярна направлению, в котором смотрит нос катера. Это значит, что по своей траектории катер движется боком. На другом берегу реки катер причалит в точке C, расстояние $s_{\min}$ до которой можно найти из подобия треугольников:

$$\frac{s_{\min}}{l} = \frac{v}{v_2}.$$

Модуль скорости v находится по теореме Пифагора: $v = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}$. В результате получаем

$$s_{\min} = l\,\frac{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_2} = l\,\sqrt{(v_1/v_2)^2 - 1}\,.$$

4. *Лодка на тросе.* Лодку подтягивают к берегу за привязанный к ее носу трос, наматывая его на равномерно вращающийся барабан (рис. 20). Барабан

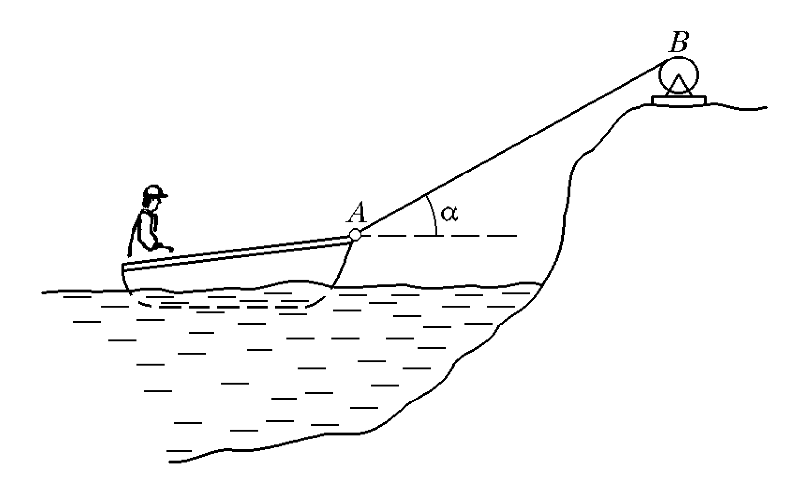


Рис. 20. Подтягивание к берегу с помощью троса

установлен на высоком берегу. С какой скоростью v движется лодка в тот момент, когда трос образует угол α с горизонтом? Трос выбирается барабаном со скоростью v_1.

Решение. Точка A троса, где он привязан к лодке, движется с той же скоростью, что и лодка. Эта скорость $\mathbf{v}$ направлена горизонтально. Чтобы связать ее со скоростью выбирания троса, нужно сообразить, что движение троса сводится к повороту вокруг точки B, где он касается барабана, и скольжению вдоль собственного направления, т. е. прямой AB. Поэтому естественно разложить скорость $\mathbf{v}$ точки A на две составляющие $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, направленные вдоль и поперек троса (рис. 21): $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Скорость $\mathbf{v}_2$, направ-

ленная поперек, связана с поворотом троса. Модуль скорости $\mathbf{v}_1$, направленной вдоль троса, — это и есть данное в условии задачи значение скорости

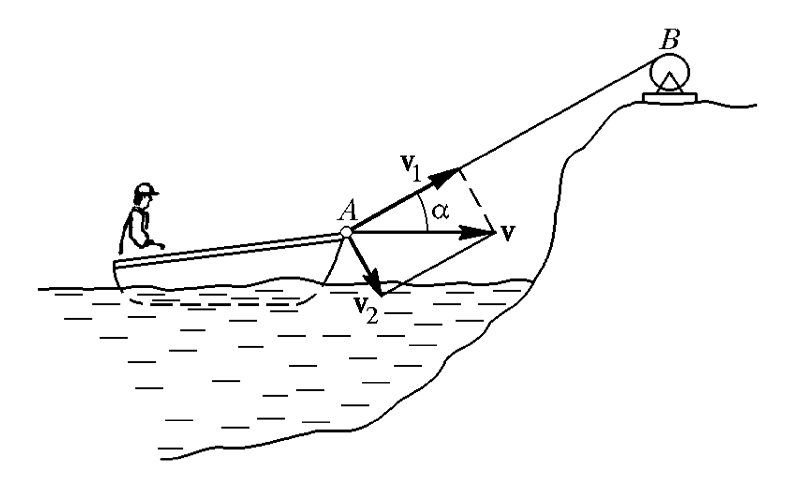


Рис. 21. Разложение скоростей точки A на составляющие

выбирания троса. Из рисунка видно, что $v\cos\alpha = v_1$, откуда $v = v_1/\cos\alpha$.

По мере приближения лодки к берегу угол α становится больше. Это значит, что $\cos\alpha$ убывает и искомая скорость v возрастает.

Задача для самостоятельного решения

Человек находится в поле на расстоянии l от прямолинейного участка шоссе. Слева от себя он замечает движущийся по шоссе автомобиль. В каком направлении следует бежать к шоссе, чтобы выбежать на дорогу впереди автомобиля и как можно дальше от него? Скорость автомобиля u, скорость человека v.

- Объясните, почему вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории.
- В некоторых случаях траектория движения частицы может иметь изломы. Приведите примеры таких движений. Что можно сказать о направлении скорости в точках, где траектория имеет излом?
- В случае непрерывного механического движения вектор скорости не испытывает скачков ни по модулю, ни по направлению. Появление скачков скорости всегда связано с некоторой идеализацией реального процесса. Какие идеализации присутствовали в приведенных вами примерах траекторий с изломами?
- Найдите ошибку в приводимом ниже решении задачи 4. Разложим скорость $\mathbf{v}_1$, точки A троса на вертикальную и горизонтальную составляющие (рис. 22). Горизонтальная составляющая $\mathbf{v}$ — это и есть искомая скорость лодки. Поэтому $v = v_1\cos\alpha$ (неверно!).

Рис. 22. Разложение скорости троса на горизонтальную и вертикальную составляющие

△ **Скорость как производная**. Вернемся к выражению (1) для мгновенной скорости. При движении частицы ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ изменяется, т. е. является некоторой функцией времени: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Перемещение $\Delta\mathbf{r}$ за промежуток времени Δt представляет собой разность радиусов-векторов в моменты времени $t + \Delta t$ и t:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

Поэтому формулу (1) можно переписать в виде

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (5)$$

В математике такую величину называют производной от функции $\mathbf{r}(t)$ по времени t. Для нее используют следующие обозначения:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (6)$$

Последнее обозначение (точка над буквой) характерно именно для производной по времени. Отметим, что в данном случае производная представляет собой вектор, так как получается в результате дифференцирования векторной функции по скалярному аргументу.

Для модуля мгновенной скорости в соответствии с (2) справедливо выражение

$$v = v_s = \frac{ds}{dt}. \ ▲$$

§ 8. Ускорение

Только при прямолинейном равномерном движении частицы ее скорость v остается неизменной. Во всех остальных случаях вектор скорости изменяется. При прямолинейном неравномерном движении изменяется модуль скорости. При криволинейном равномерном движении изменяется направление скорости. В общем случае неравномерного криволинейного движения изменяется и модуль, и направление скорости. Физическая величина, которая характеризует быстроту изменения скорости, называется *ускорением*.

Пусть за промежуток времени Δt вектор скорости изменяется от значения $\mathbf{v}_1$ до значения $\mathbf{v}_2$. Отношение изменения скорости $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ к промежутку времени Δt называется *средним ускорением* за этот промежуток:

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (1)$$

Ускорение — вектор. Среднее ускорение представляет собой вектор, направленный вдоль $\Delta\mathbf{v}$. Он характеризует быстроту изменения скорости за определенный конечный промежуток времени. Неограниченно уменьшая этот промежуток, приходим к физической величине, характеризующей быстроту изменения скорости в данный момент времени. Эта величина называется *ускорением*:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{2}$$

В отличие от вектора скорости, который всегда направлен по касательной к траектории, вектор ускорения может иметь составляющие, направленные как по касательной, так и по нормали к траектории.

Направление ускорения. Вектор ускорения направлен вдоль траектории только тогда, когда эта траектория прямолинейная. Если частица ускоряется, т. е. модуль ее скорости растет, то вектор $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ направлен вдоль траектории вперед. Такое же направление имеет и вектор ускорения. Если движение частицы замедляется, т. е. модуль ее скорости убывает, то вектор ускорения направлен вдоль траектории назад.

Вектор ускорения направлен строго поперек траектории только при равномерном движении по криволинейной траектории, когда модуль скорости неизменен. Если вектор скорости по модулю не

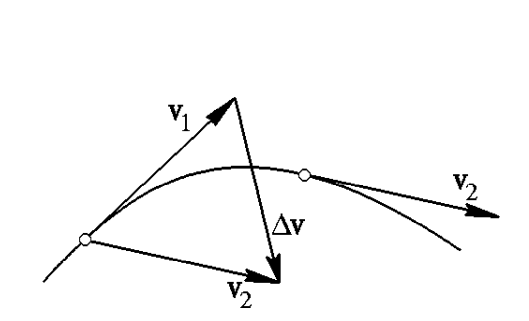


Рис. 23. Приращение скорости $\Delta\mathbf{v}$ при равномерном движении по криволинейной траектории

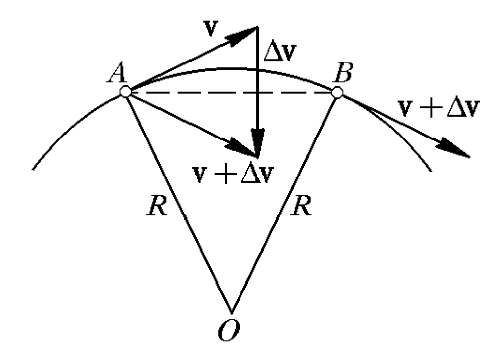


Рис. 24. Приращение скорости при равномерном движении по окружности

меняется, то все его изменение сводится к повороту. При этом, разумеется, векторы скорости для разных моментов времени изображаются выходящими из одной точки, хотя эти векторы соответствуют разным точкам траектории (рис. 23). Видно, что вектор $\Delta\mathbf{v}$, а следовательно, и вектор ускорения направлены в сторону вогнутости траектории.

Рассмотрим частный случай движения по криволинейной траектории — равномерное движение по окружности радиуса R (рис. 24). В этом случае вектор ускорения в любой точке траектории направ-

лен к центру окружности. С этим связано его название — *центростремительное ускорение.*

Центростремительное ускорение. Модуль центростремительного ускорения зависит от радиуса R окружности и модуля скорости $\mathbf{v}$. Для вывода формулы, выражающей эту зависимость, рассмотрим две близкие точки траектории A и B, в которых частица находится через промежуток времени Δt (рис. 24). Радиусы OA и OB, проведенные из центра O окружности в эти точки, перпендикулярны соответствующим векторам скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$.

Перенесем вектор $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ назад параллельно самому себе так, чтобы его начало оказалось в той же точке A, что и начало вектора $\mathbf{v}$. Тогда вектор приращения скорости $\Delta\mathbf{v}$ будет замыкать треугольник, образованный этими векторами скоростей. Из подобия равнобедренных треугольников на рис. 24 следует

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{AB}{R}.$$

Длина хорды AB при $\Delta t \to 0$ все меньше и меньше отличается от длины дуги AB, равной $v\Delta t$. Поэтому при $\Delta t \to 0$ находим

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}. \qquad (3)$$

Полученное выражение (3) для центростремительного ускорения справедливо при равномерном движении по любой криволинейной

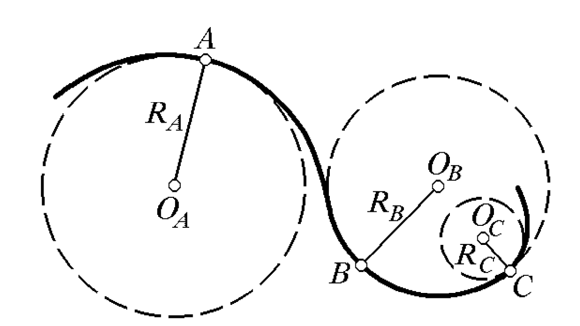


Рис. 25. Приближение участков криволинейной траектории дугами окружностей

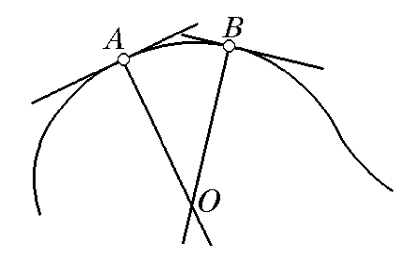


Рис. 26. К нахождению центра аппроксимирующей окружности

траектории. Дело в том, что достаточно малый участок любой плавной кривой можно приближенно рассматривать как дугу некоторой окружности. Положение центра этой окружности и ее радиус будут своими для каждой точки траектории (рис. 25).

Для геометрического определения положения центра и радиуса нужно взять две близкие точки криволинейной траектории, провести в них касательные и построить перпендикуляры к этим касательным (рис. 26). Центр окружности, аппроксимирующей криволинейную траекторию в точке A, находится как предельное поло-

жение точки O пересечения этих перпендикуляров при неограниченном уменьшении длины дуги AB, т. е. при стремлении точки B к точке A.

Таким образом, любое движение по криволинейной траектории можно представить как движение по дугам окружностей, центры и радиусы которых изменяются от точки к точке траектории. При равномерном движении вектор ускорения в каждой точке траектории направлен к центру соответствующей окружности, т. е. перпендикулярно касательной к траектории, а его модуль дается той же формулой (3). Поэтому в отличие от равномерного движения по окружности, где вектор ускорения не изменяется по модулю и, поворачиваясь, смотрит все время в одну точку, при равномерном движении по произвольной кривой вектор ускорения уже не сохраняется по модулю и, изменяя свое направление, уже не смотрит в одну точку. Однако в каждой точке он направлен по нормали к траектории.

В общем случае при неравномерном движении по произвольной криволинейной траектории вектор ускорения можно представить в виде суммы двух составляющих: тангенциальной и нормальной. *Тангенциальное ускорение* направлено по касательной к траектории и характеризует быстроту изменения модуля скорости. *Нормальное ускорение* направлено в каждой точке к центру окружности, аппроксимирующей траекторию движения в этой точке, и характеризует быстроту изменения направления скорости.

- Объясните, почему при равномерном криволинейном движении вектор ускорения в каждой точке направлен перпендикулярно траектории.
- Опишите способ нахождения центра и радиуса окружности, аппроксимирующей данную траекторию в какой-либо ее точке.
- В какую сторону — вперед или назад — направлен вектор тангенциального ускорения? Другими словами, направлен он вдоль вектора скорости или противоположно ему?

△ **Ускорение — производная скорости.** По аналогии с формулой (5) предыдущего параграфа, рассматривая скорость $\mathbf{v}$ как векторную функцию времени t, можно сказать, что определяемое формулой (2) ускорение $\mathbf{a}$ представляет собой производную функции $\mathbf{v}(t)$ по времени t. Используя для производной те же обозначения, что и в формуле (6) предыдущего параграфа, можно написать

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{v}'(t), \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \tag{4}$$

Сравнивая эти формулы с соответствующими выражениями (6) из § 7, можно отметить определенную формальную аналогию между скоростью и ускорением. Пусть конец радиуса-вектора описывает некоторую траекторию, как показано на рис. 27. В

каждый момент времени вектор скорости направлен по касательной к траектории. Изобразим все векторы скорости $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и т. д. для разных моментов времени так, чтобы они начинались из одной точки A (рис. 27). При движении частицы по траектории ко-

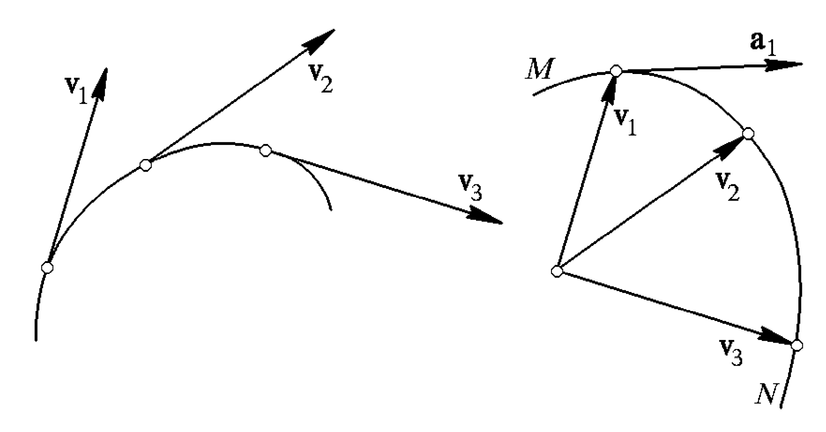


Рис. 27. Годограф вектора скорости — кривая HN.Вектор ускорения **a** направлен по касательной к годографу скорости

нец вектора скорости на таком чертеже будет описывать кривую MN, называемую *годографом* вектора скорости. Используя эту терминологию, можно сказать, что сама траектория частицы является годографом ее радиуса-вектора.

Теперь легко сообразить, что вектор ускорения на рис. 27 будет в каждой точке направлен по касательной к годографу MN вектора скорости, подобно тому как вектор скорости направлен по касательной к траектории на рис. 14.

С помощью описанной аналогии легко найти формулу для модуля центростремительного ускорения при равномерном движении

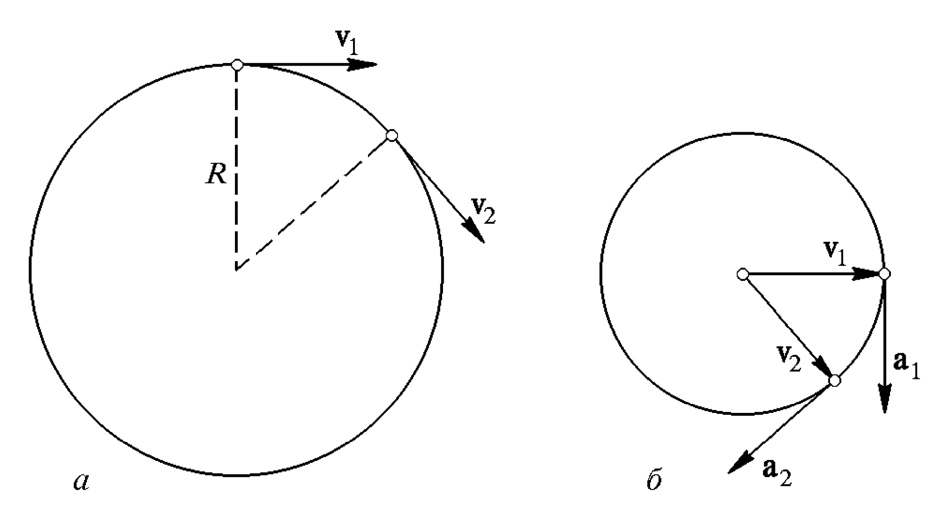


Рис. 28. Вектор скорости при равномерном движении по окружности (а) и годограф вектора скорости (б). Вектор ускорения в каждой точке траектории направлен к центру окружности

по окружности. Годограф скорости для такого движения показан на рис. 28. Пока частица совершает один оборот по траектории, ко-

нец вектора скорости совершает один оборот по годографу. Модуль скорости частицы равен отношению длины окружности $2\pi R$ к периоду обращения T:

$$v = \frac{2\pi R}{T}.$$

Аналогичное соотношение, естественно, связывает модуль ускорения a с радиусом годографа скорости v:

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Сравнивая эти формулы, получаем

$$a = \frac{v^2}{R},$$

а сравнивая рис. 28*а*, *б*, убеждаемся, что вектор ускорения $\mathbf{a}$ в каждый момент времени направлен противоположно радиусу-вектору частицы для этого же момента времени, проведенному из центра окружности: ускорение $\mathbf{a}$ направлено к центру окружности, являющейся траекторией движения.

Тангенциальное и нормальное ускорения. Остановимся подробнее на выводе формул для тангенциального и нормального ускорений. Для этого запишем выражение для вектора скорости в определенной точке криволинейной траектории в виде

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}, \tag{5}$$

где v — модуль скорости, а $\boldsymbol{\tau}$ — вектор, равный по модулю единице и направленный вдоль касательной к траектории в ту сторону, куда движется частица. Будем для краткости называть его единичным вектором касательной. При движении частицы по криволинейной траектории меняется только направление вектора $\boldsymbol{\tau}$, а его модуль остается неизменным и равным единице.

Так как ускорение в соответствии с (2) равно производной скорости по времени, то, применяя к (5) правило дифференцирования произведения двух функций, можно написать

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\boldsymbol{\tau} + v\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \tag{6}$$

Первое слагаемое в правой части — это тангенциальное ускорение: видно, что оно направлено по касательной к траектории вперед, когда модуль скорости растет $(dv/dt > 0)$, и назад, когда модуль скорости убывает $(dv/dt < 0)$.

Второе слагаемое в правой части — это нормальное ускорение, направленное перпендикулярно касательной к траектории. Чтобы убедиться в этом, преобразуем входящую в него производную $d\boldsymbol{\tau}/dt$ следующим образом. Направление единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$ фактически зависит от положения частицы на траектории, ко-

торое можно задавать длиной дуги s. Поэтому его зависимость от времени определяется зависимостью от времени длины дуги $s(t)$: $\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}(s(t))$. Дифференцируя $\tau(t)$ как сложную функцию времени, найдем

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\tau}{ds}v. \tag{7}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $ds/dt = v$. Смысл производной $d\boldsymbol{\tau}/ds$ легко уяснить из рис. 29. Все изменение вектора $\boldsymbol{\tau}$ при переходе частицы из точки A в близкую к ней точку B, отстоящую по траектории на длину дуги ds, сводится к повороту на некоторый малый угол $d\alpha$. Поэтому для модуля $d\tau$ вектора $d\boldsymbol{\tau}$ можно написать

$$d\tau = d\alpha.$$

Сам вектор $d\boldsymbol{\tau}$ можно представить в виде

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}\,d\alpha,$$

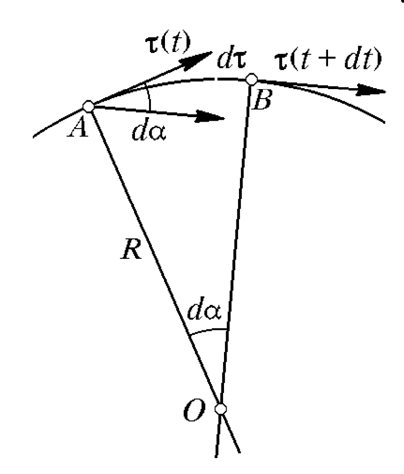


Рис. 29. К вычислению производной

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к траектории, направленный из данной точки траектории к центру O аппроксимирующей ее окружности. Из рис. 29 видно, что длину ds дуги AB можно выразить через радиус R аппроксимирующей окружности:

$$ds = R\,d\alpha.$$

В результате $d\boldsymbol{\tau}/ds$ можно представить следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}\frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{\mathbf{n}}{R},$$

после чего выражение (7) принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{v}{R}\mathbf{n}. \tag{8}$$

Теперь можно написать окончательное выражение для ускорения $\mathbf{a}$, подставляя $d\boldsymbol{\tau}/dt$ в (6):

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{9}$$

Поскольку единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ всегда смотрит в сторону вогнутости траектории, вектор полного ускорения $\mathbf{a}$ по отношению к траектории может быть направлен только так, как показано на рис. 30.

Формула (9) фактически представляет собой разложение вектора $\mathbf{a}$ на две составляющие. Такое разложение, конечно, может быть выполнено бесконечным числом способов. Данный способ

замечателен тем, что две взаимно перпендикулярные составляющие вектора ускорения имеют ясный физический смысл: одна из

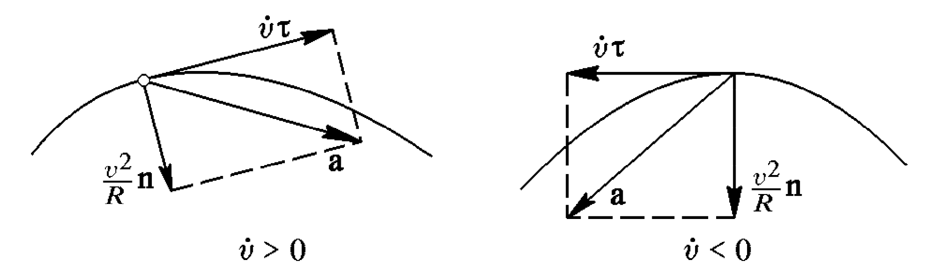


Рис. 30. Расположение вектора **a** полного ускорения по отношению к траектории

них характеризует быстроту изменения модуля скорости, а другая — быстроту изменения его направления.

По теореме Пифагора для модуля полного ускорения имеем

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

- Объясните, почему вектор $d\boldsymbol{\tau}/ds$ направлен вдоль вектора **n** нормали к траектории.
- Почему равны углы, отмеченные дужками на рис. 29?
- От чего зависит угол отклонения вектора а полного ускорения частицы от направления нормали к траектории? ▲

§ 9. Одномерное движение

При движении по заданной траектории положение частицы полностью определяется заданием одной величины — криволинейной координаты, в качестве которой удобно взять расстояние l вдоль траектории от некоторой начальной точки. Например, положение автомобиля на шоссе Санкт-Петербург—Москва можно задавать, указывая, на каком километре от Санкт-Петербурга он находится. При движении это расстояние l изменяется со временем, т. е. его следует рассматривать как функцию времени: $l = l(t)$. Наглядное представление об этой функции для конкретного движения дает *график движения*, на котором по горизонтальной оси отложено время t, а по вертикальной — расстояние l от начальной точки.

График движения. Если движение происходит все время в одном направлении, то расстояние l совпадает с пройденным от начальной точки путем Δs и на графике изображается монотонно возрастающей функцией. Пример графика такого движения приведен на рис. 31*а*. Тело начинает движение в момент времени $t = 0$ из точки, принятой за начало отсчета расстояния l вдоль траектории. График на рис. 31*б* соответствует случаю, когда тело в момент $t = 0$ прохо-

дит через точку, принятую за начало отсчета расстояний, хотя его движение происходило и до этого момента. При этом отсчитываемые назад от начальной точки $l = 0$ расстояния считаются отрицательными, как и моменты времени, предшествующие моменту

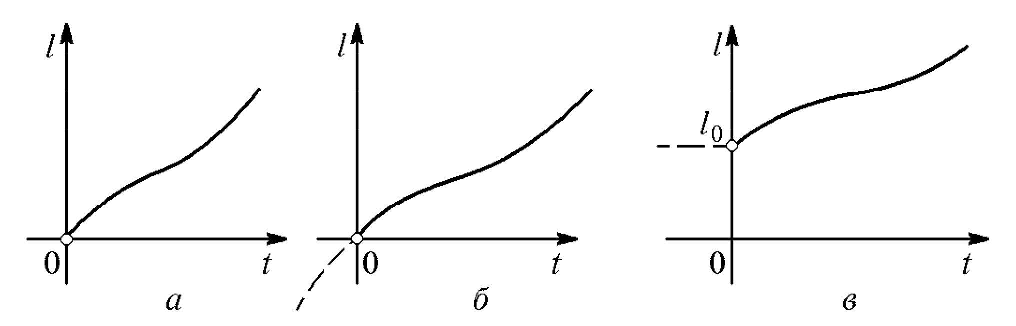


Рис. 31. График движения в одном направлении

$t = 0$. График на рис. 31*в* соответствует движению, которое началось в момент $t = 0$ из точки, отстоящей на расстояние l_0 от места, принятого за начало отсчета.

В отличие от графического изображения траектории, по которому легко судить о направлении скорости (касательная к траектории), но ничего нельзя сказать о ее модуле, график движения позволяет судить о значении скорости в каждый момент времени: чем круче наклон графика, тем быстрее происходит движение. Здесь можно ввести по определению скорость

$$v_l = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}, \tag{1}$$

которая характеризует быстроту изменения криволинейной координаты l. При увеличении l, когда $\Delta l > 0$, v_l положительна; при уменьшении l, когда $\Delta l < 0$, v_l отрицательна. Легко видеть, что модуль v_l совпадает с мгновенной скоростью прохождения пути, определяемой формулой (2) § 7. На графике движения возрастанию l соответствует положительный наклон кривой, убыванию l — отрицательный наклон. Конечно, никакой информации о форме самой траектории этот график уже не содержит.

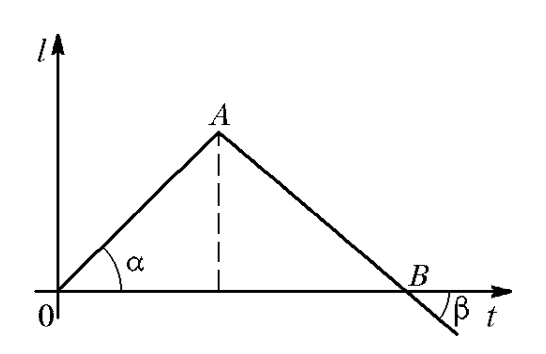


Рис. 32. Участок *OA* соответствует равномерному движению в одном направлении, участок *AB* — равномерному движению в обратном направлении

При равномерном движении, т. е. движении с постоянной по модулю скоростью, график изображается прямой линией (участок *OA* на рис. 32). Легко видеть, что тангенс угла наклона α этого участка графика к оси времени численно равен скорости движения. Участок *AB* соответствует равномерному

движению в обратном направлении: расстояние l от начальной точки O убывает со временем. Скорость $v_l = \Delta l/\Delta t$ на этом участке отрицательна, так как $\Delta l < 0$. Наклон графика на этом участке отрицательный, а значение скорости v_l по-прежнему равно тангенсу отрицательного угла наклона β.

При изучении движения по заданной траектории будем в дальнейшем обозначать скорость v_l через v. При описании движения наряду с графиком, изображающим зависимость расстояния l от времени t, удобно рассматривать также и график скорости. Для равномерного движения график зависимости скорости от времени представляет собой горизонтальную прямую (рис. 33). Путь Δs, проходимый за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, на этом рисунке изображается площадью прямоугольника, ограниченного осью t,

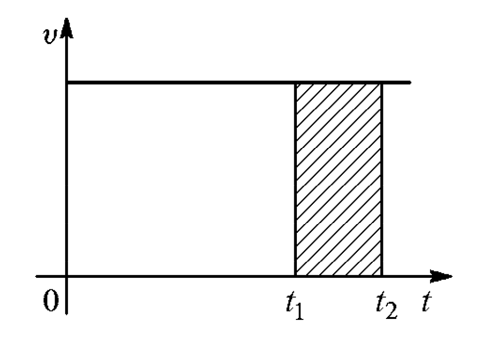


Рис. 33. График скорости равномерного движения

Рис. 34. График равномерного движения

двумя вертикальными отрезками, проходящими через точки t_1 и t_2, и графиком скорости $v(t)$. Такая геометрическая интерпретация соответствует формуле

$$\Delta s = v\,\Delta t.$$

Применяя эту формулу к промежутку времени от $t = 0$ до некоторого момента t, можно написать выражение для координаты l в любой момент времени t при движении с постоянной скоростью v:

$$l(t) = l_0 + vt. \qquad (2)$$

Здесь l_0 — значение координаты l при $t = 0$, т. е. $l_0 = l(0)$. График движения, описываемого формулой (2), показан на рис. 34.

Путь на графике скорости. Рассмотрим теперь движение, график скорости которого показан на рис. 35*а*. На промежутке времени от 0 до t_1 движение происходит с постоянной скоростью v_1. В момент $t = t_1$ тело останавливается и начинает двигаться с постоянной скоростью v_2 в противоположном направлении. Очевидно, что $v_2 < 0$. Путь, пройденный за промежуток времени от 0 до t_1, изображается

площадью верхнего прямоугольника и равен $v_1 t_1$. Если движение начинается из точки $l = 0$, как показано на рис. 35*б*, то расстояние l в любой момент времени $t \leqslant t_1$ совпадает с пройденным к этому моменту путем и дается выражением

$$l(t) = v_1 t \quad (t \leqslant t_1).$$

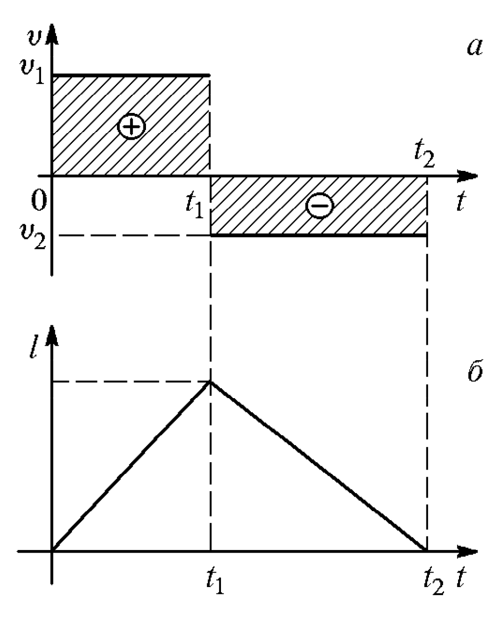


Рис. 35. На графике скорости расстояние изображается заштрихованной площадью

Путь, пройденный за промежуток времени от t_1 до t_2, изображается площадью нижнего прямоугольника и равен $-v_2(t_2 - t_1)$, так как $v_2 < 0$. Поскольку после момента времени $t = t_1$ тело движется в обратном направлении, то расстояние l от начальной точки теперь убывает и уже не совпадает с пройденным к этому моменту путем. Расстояние l при $t > t_1$ дается выражением

$$l(t) = v_1 t_1 + v_2(t - t_1) \quad (t_1 < t < t_2),$$

где второе слагаемое в правой части отрицательно. Для определения пути, пройденного к моменту времени $t > t_1$, в этой формуле нужно изменить знак перед вторым слагаемым. Как видно из рис. 35*б*, в момент времени t_2 тело возвращается в исходную точку $l = 0$, а пройденный им к этому моменту путь равен $2v_1 t_1$.

- Посмотрите на график движения, показанный на рис. 36. Охарактеризуйте движение тела в каждый из указанных промежутков времени.

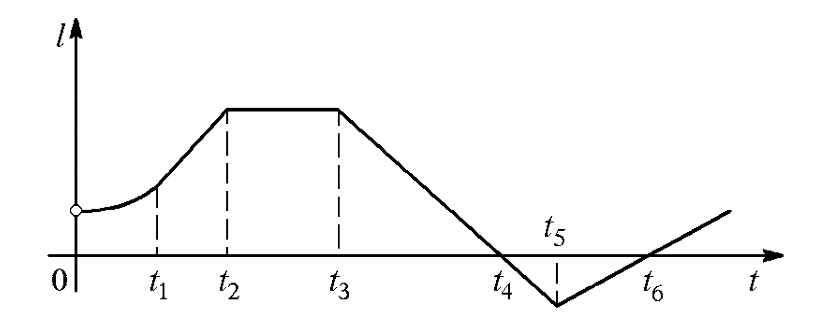


Рис. 36. Как движется тело на каждом из участков?

- Что означают изломы на графике $l(t)$? Что означают разрывы на графике $v(t)$? Могут ли быть изломы на графике $v(t)$? Что они означают? Могут ли быть разрывы на графике $l(t)$?
- После того как вы ответили на второй вопрос, можете ли вы что-нибудь добавить к своему ответу на первый вопрос? Если да, то сформулируйте четко, что было упущено вами при первом ответе.

△ **Степени свободы**. Реальное физическое пространство трехмерно, поэтому для характеристики положения материальной точки нужны три числа. Такими тремя числами могут быть, например, проекции радиуса-вектора частицы на оси декартовой системы координат. Но в рассмотренных выше случаях векторные характеристики движения никак не использовались. Наоборот, утверждалось, что для указания положения частицы достаточно одного числа, и соответствующее движение называлось одномерным. Чем обусловлена такая возможность? Тем, что траектория движения фиксирована — она не меняется при изменении таких характеристик движения, как скорость, ускорение и т. д.

Неизменность траектории обеспечивается, как говорят, *связями*, наложенными на рассматриваемую систему. Например, траектория вагона метро однозначно задается конфигурацией проложенного тоннеля. Грузик маятника, выполненного в виде насаженного на жесткий стержень шарика, может двигаться только по окружности определенного радиуса. Подобные примеры часто встречаются в природе и технике. Говорят, что в этих случаях наложенные связи уменьшают *число степеней свободы.*

Свободная материальная точка в трехмерном пространстве имеет *три степени свободы* в соответствии с тем, что ее положение задается тремя независимыми числами. Точка, которая может двигаться по заданной поверхности, имеет только две степени свободы. Например, для точки на поверхности земного шара достаточно указать две географические координаты — широту и долготу. Наконец, вагон метро в тоннеле обладает только одной степенью свободы. Движение вагона по рельсам одномерно, хотя сам тоннель может быть причудливым образом изогнут в трехмерном пространстве. Ясно, что использовать векторные величины для описания движения вагона совершенно излишне.

В подобных случаях для описания движения вводятся так называемые *обобщенные координаты*, число которых равно числу степеней свободы. Когда траектория частицы заранее задана, в качестве такой обобщенной координаты удобно выбирать расстояние вдоль траектории от некоторой начальной точки.

- Какие величины удобно выбрать в качестве обобщенных координат для корабля, плывущего в океане? Для подводной лодки? Сколько обобщенных координат нужно для корабля, рассматриваемого как материальная точка, и для того же корабля в случае, когда необходимо учесть его габариты?
- Брошенный под углом к горизонту камень летит по некоторой траектории. Можно ли считать его движение одномерным? Есть ли здесь связи, наложенные на движение?

- Какие возможные движения вагона метро не принимаются во внимание, когда считается, что у него одна степень свободы?
- Как ускорение a_l при одномерном движении по криволинейной траектории связано с введенным ранее тангенциальным ускорением? ▲

§ 10. Неравномерное одномерное движение

Для характеристики неравномерного движения по заданной траектории, т. е. движения с переменной скоростью, удобно ввести ускорение a_l, характеризующее быстроту изменения скорости v_l:

$$a_l = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_l}{\Delta t}. \quad (1)$$

Когда скорость v_l увеличивается, ускорение $a_l > 0$. При замедлении движения, когда v_l убывает, ускорение $a_l < 0$. В дальнейшем будем обозначать ускорение a_l через a, опуская значок l. Нужно, однако, помнить, что оно характеризует только изменение величины скорости, а не ее направления. Поэтому a не следует смешивать с модулем полного ускорения **a**, который обозначается той же буквой a. При изучении движения по заданной траектории полное ускорение в кинематических задачах обычно не фигурирует, а интерес представляет именно рассматриваемое здесь ускорение a_l, характеризующее быстроту изменения скорости v_l прохождения пути.

Равноускоренное и равнозамедленное движения. Самый простой случай неравномерного движения — это движение с постоянным ускорением. Такое движение называют *равнопеременным*. Иногда

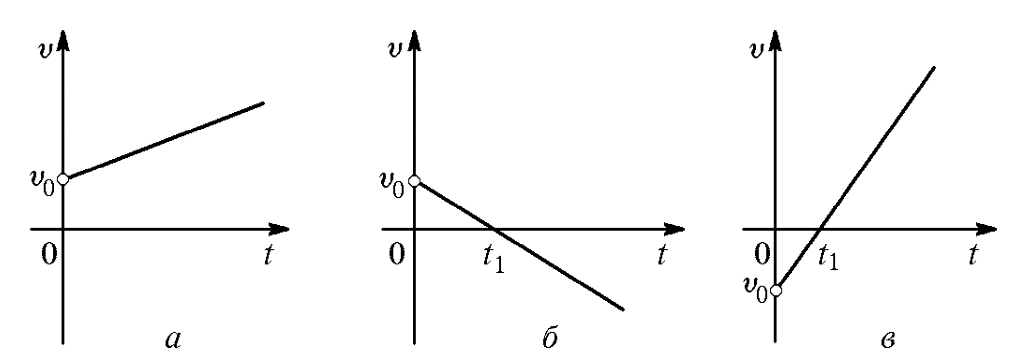


Рис. 37. График скорости при постоянном ускорении

равнопеременное движение называют *равноускоренным*, если скорость и ускорение направлены в одну сторону и модуль скорости растет, и *равнозамедленным*, если скорость и ускорение направлены в противоположные стороны и модуль скорости убывает. Нетрудно видеть, что если равнозамедленное движение будет продолжаться с

прежним ускорением и после остановки, т. е. после обращения скорости в нуль, то оно превратится в равноускоренное движение в противоположном направлении.

При постоянном ускорении промежуток времени Δt в формуле (1) можно выбирать любым, так как отношение $\Delta v/\Delta t$ не зависит от Δt. Тогда приращение скорости за любой промежуток времени можно выразить следующим образом:

$$\Delta v = a\,\Delta t. \tag{2}$$

Применяя эту формулу к промежутку времени от $t = 0$ до некоторого момента t, можно написать выражение для скорости v в любой момент времени t при движении с постоянным ускорением a:

$$v(t) = v_0 + at. \tag{3}$$

Здесь v_0 — значение скорости при $t = 0$, т. е. $v_0 = v(0)$. Графики скорости, соответствующие формуле (3), показаны на рис. 37. Рис. 37*а* относится к случаю, когда направления начальной скорости и ускорения совпадают (равноускоренное движение), рис. 37*б* — к случаю, когда направления начальной скорости и ускорения противоположны. За положительное направление выбрано направление начальной скорости v_0. До момента времени t_1 это равнозамедленное движение, а затем — равноускоренное в противоположном направлении. На рис. 37*в* в качестве положительного направления выбрано направление ускорения. Подчеркнем, что во всех этих случаях справедлива одна и та же формула (3). Различаются они только знаками v_0 и a.

Путь при равнопеременном движении. Получим формулу, которая дает положение тела $l(t)$ в момент времени t при равнопеременном движении. Рассмотрим малый промежуток времени Δt. Как следует из определения средней скорости $v_{ср} = \Delta s/\Delta t$, пройденный

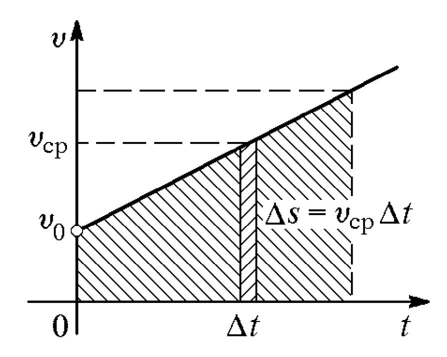


Рис. 38. Определение пути по графику скорости

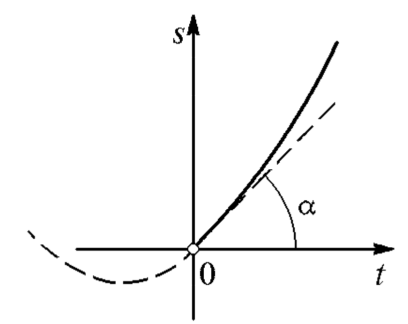


Рис. 39. График движения с постоянным ускорением

за промежуток времени Δt путь Δs можно записать в виде $\Delta s = v_{ср}\Delta t$. Из рис. 38 видно, что путь Δs численно равен площади прямоугольной полоски с шириной основания Δt и высотой $v_{ср}$. Ес-

ли промежуток времени Δt выбрать достаточно малым, то среднюю скорость $v_{ср}$ на интервале Δt можно заменить на модуль мгновенной скорости v в любой точке этого интервала:

$$\Delta s \approx v\, \Delta t.$$

Это соотношение выполняется тем точнее, чем меньше промежуток времени Δt.

Разбивая полное время движения на такие малые интервалы и учитывая, что полный путь s складывается из путей, пройденных за эти интервалы, можно убедиться, что на графике скорости он изображается площадью трапеции, ограниченной осями t и v, графиком скорости и вертикальным отрезком, проходящим через точку t на оси времени. Так как площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то

$$s(t) = \frac{1}{2}(v_0 + v)t. \tag{4}$$

Подставляя сюда значение $v(t) = v_0 t + at$ из (3), получаем

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{5}$$

График движения, на котором изображается зависимость $s(t)$, описываемая формулой (5), представляет собой отрезок параболы (рис. 39).

Скорость и наклон касательной. Наклон касательной к графику движения определяет скорость. Тангенс угла наклона касательной при $t = 0$ численно равен начальной скорости: $\operatorname{tg} \alpha = v_0$. Из графика на рис. 39 видно, что при дальнейшем движении наклон касательной возрастает, что соответствует увеличению скорости в полном согласии с графиком скорости на рис. 38.

При выводе формулы (5) мы предполагали, что движение все время происходит в одну сторону. В этом случае расстояние l тела от начальной точки совпадает с пройденным путем. Тем не менее формула (5) дает расстояние l от начальной точки и в том случае, когда на промежутке времени от 0 до t направление движения изменялось (рис. 40):

$$l(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{5а}$$

Пройденный за это время путь по-прежнему изображается площадью между осью времени и графиком скорости. Эта площадь заштрихована на рис. 40. Но треугольник, лежащий ниже оси времени, соответствует движению в обратном направлении и дает отрицательный вклад в определяемое формулой (5а) расстояние от начальной точки.

Формулу (5а) для расстояния l от начальной точки можно записать таким образом, чтобы она не содержала явно времени t движе-

ния. Для этого в формулу (5а) следует подставить не скорость v, а время из формулы $v(t) = v_0 + at$. Это время будет

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Тогда для l получаем

$$l = \frac{v_0 + v}{2}\,\frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \tag{6}$$

Если направление движения не изменялось, то формула (6), естественно, дает выражение и для пройденного пути при движении с постоянным ускорением.

Формулы (4)–(6) получены для равнопеременного движения — движения с постоянным ускорением. Однако геометрические соображения, использовавшиеся при их выводе, справедливы и тогда, когда

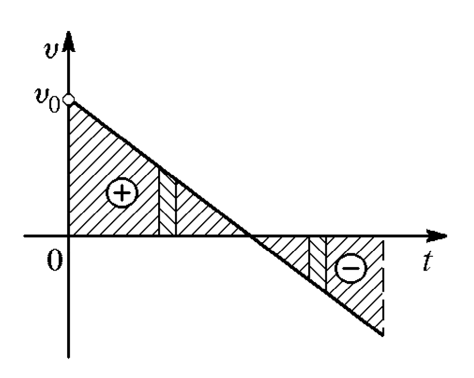


Рис. 40. Определение расстояния по графику скорости, когда направление движения изменилось

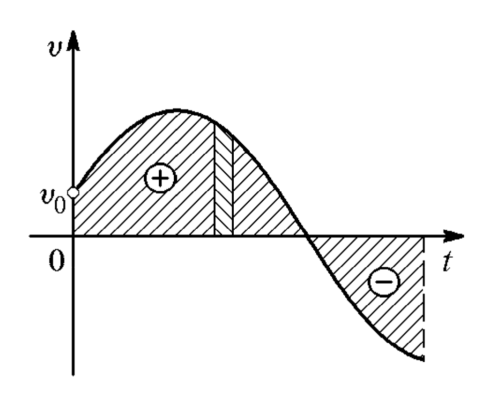


Рис. 41. Определение расстояния по графику скорости

ускорение при движении изменяется. Во всех случаях пройденный путь численно равен площади между графиком скорости и осью времени (рис. 41). Расстояние l от начальной точки дается алгебраической суммой, в которую площади над осью времени входят со знаком «плюс», а лежащие под этой осью — со знаком «минус».

Задачи

1. *Разгон автомобиля.* Легковой автомобиль способен разогнаться с места до скорости 100 км/ч за 16 секунд. Оцените ускорение автомобиля и путь разгона.

Решение. При оценке можно считать ускорение постоянным. Для его нахождения нужно разделить скорость на время разгона. Разделив 100 км/ч на 16 с, получаем ускорение, выраженное в километрах в час за секунду: 6,25 (км/ч) /с. Это внесистемная единица ускорения. В Международной системе единиц СИ, где в качестве основных единиц длины и времени выбраны метр и секунда, производная единица ускорения — это метр в секунду за секунду, т. е. м/с^2. Поэтому нужно скорость перевести из км/ч в м/с:

$$100\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 100\cdot\frac{1000\ \text{м}}{36\,000\ \text{с}} = 27{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Разделив это значение на 16 с, получим 1,74 м/с^2. Путь разгона можно оценить как произведение средней скорости на время разгона:

$$\frac{27{,}8\ \text{м/с}}{2}\cdot 16\ \text{с} = 222\ \text{м}.$$

2. *Торможение автомобиля*. При экстренном торможении автомобиля модуль его ускорения не превышает 5 м/с^2. Оцените тормозной путь автомобиля при скорости движения 60 км/ч.

Решение. При оценке будем пренебрегать временем реакции водителя, а движение автомобиля будем считать равнозамедленным. Тормозной путь можно найти с помощью формулы (6), подставляя в нее начальную скорость $v_0 = 60$ км/ч $= 16{,}7$ м/с, конечную скорость $v = 0$ и ускорение $a = -5$ м/с^2:

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = 27{,}8\ \text{м} \approx 30\ \text{м}.$$

3. *Тормозной путь*. Во сколько раз возрастает тормозной путь при увеличении скорости в два раза?

Ответ: В четыре раза, если считать ускорение постоянным и пренебречь временем реакции водителя.

4. *Время торможения*. Во сколько раз возрастает время торможения при увеличении скорости в два раза?

Ответ: В два раза.

Свободное падение. Важный частный случай равнопеременного движения — это *свободное падение* тела в поле тяжести Земли. Свободным падением называют движение в вакууме, когда сопротивление воздуха отсутствует.



Рис. 42. Падение разных предметов в трубке, из которой выкачан воздух

Такие условия можно создать, откачав воздух из длинной стеклянной трубки (трубка Ньютона, рис. 42). Находящиеся в трубке предметы, такие, как свинцовая дробинка, легкая пробка и перышко, при перевороте трубки вверх дном будут падать с одинаковым ускорением и достигнут нижнего конца одновременно. В воздухе падение этих тел происходит иначе: первой достигает дна дробинка, затем пробка и лишь спустя некоторое время — перышко, которое плавно опускается, двигаясь практически равномерно.

Во многих случаях и при наличии воздуха можно использовать идеализированное представление о свободном падении. Эта идеализация оказывается тем лучше, чем выше плотность тела. Например, свинцовая дробинка падает практически одинаково как в откачанной трубке, так и в трубке, заполненной воздухом. Но применимость данной идеализации, как и любой физической модели, зависит не только от свойств тела (плотность вещества, форма и т. п.), но и от ус-

ловий его движения. Так, при затяжном прыжке с парашютом падение можно считать свободным, пока скорость не слишком велика. Однако по мере роста скорости сопротивление воздуха увеличивается и в конце концов даже при нераскрытом парашюте устанавливается равномерное движение со скоростью около 60 м/с. С раскрытым парашютом установление скорости происходит значительно быстрее и сама установившаяся скорость не превосходит значения 6–8 м/с.

То, что свободное падение всех тел происходит с одинаковым ускорением, впервые было установлено Галилеем. Значения ускорения свободного падения несколько различаются в зависимости от географического положения, но эти различия невелики. Поэтому обычно считают ускорение свободного падения равным его значению в Париже и обозначают буквой g:

$$g = 9{,}80943 \text{ м/с}^2 \approx 9{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора $\mathbf{g}$ совпадает с направлением неподвижного отвеса и называется *вертикалью* в данном месте Земли.

Обратим внимание на то, что свободным падением называют движение с ускорением $\mathbf{g}$ независимо от того, как при этом направлена скорость. Брошенный вверх или под углом к горизонту камень находится в свободном падении во все моменты своего полета, пока не упадет на Землю.

Задачи

5. *Время подъема.* Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сколько времени оно будет подниматься? Какой максимальной высоты достигнет?

Решение. Скорость $v(t) = v_0 - gt$ в высшей точке полета обращается в нуль. Отсюда время подъема $t = v_0/g$. Подставляя это значение в выражение (5), получаем

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g \cdot v_0^2}{2g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

6. *Время падения.* Сколько времени длится свободное падение брошенного вертикально вверх тела обратно с максимальной высоты $v_0^2/2g$? Какова его скорость в момент удара о Землю?

Решение. Время свободного падения определяется из выражения $h = gt^2/2$, что дает $t = \sqrt{2h/g} = v_0/g$. Время падения равно времени подъема. Скорость в момент удара находится из выражения $v = gt$ при подстановке в него $t = v_0/g$, что дает $v = v_0$ — конечная скорость падения равна начальной скорости подъема. Эта скорость связана с высотой h, с которой падает тело, соотношением $v = \sqrt{2gh}$.

- В каких случаях при равноускоренном движении вектор полного ускорения постоянен?
- Чем равнозамедленное движение отличается от равноускоренного?

- Как по заданному графику скорости неравномерного движения определить пройденный путь? Приведите обоснование такой геометрической интерпретации. Каким образом по этому графику определить положение тела, т. е. его расстояние от начальной точки?
- Каким образом пройденный путь может равняться площади, ограниченной графиком скорости? Ведь путь измеряется в метрах, а площадь — в квадратных метрах. Объясните.

Задачи

1. *Весенняя капель.* С крыши падают две капли с интервалом времени $\tau = 1$ с. Какое расстояние будет между каплями через $t = 2$ с после отрыва первой капли? Какой будет в этот момент скорость первой капли относительно второй?

Решение. Поскольку движение капли после отрыва происходит без начальной скорости ($v_0 = 0$) и с постоянным ускорением ($a = g$), то в соответствии с формулой (5) пройденное первой каплей расстояние h_1 от крыши в момент времени t дается выражением

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}.$$

Вторая капля начинает движение позже первой. Поэтому к моменту времени t она находилась в движении в течение времени $t - \tau$ и пройденное ею расстояние

$$h_2 = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Очевидно, что расстояние H между каплями равно $h_1 - h_2$:

$$H = h_1 - h_2 = \frac{1}{2} g\left[t^2 - (t-\tau)^2\right] = g\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right). \qquad (7)$$

Подставляя сюда значения $\tau = 1$ с и $t = 2$ с и принимая $g = 10$ м/с^2, находим $H = 15$ м.

Скорость v первой капли относительно второй легко найти как разность скоростей v_1 и v_2, с которыми движутся капли в момент времени t. С помощью формулы (3) имеем

$$v_1 = gt, \ v_2 = g(t-\tau).$$

Отсюда следует, что скорость первой капли относительно второй не зависит от времени:

$$v = v_1 - v_2 = g\tau = 10 \text{ м/с}.$$

Видно, что эта относительная скорость равна скорости первой капли, которую она успела набрать к моменту τ отрыва второй. В дальнейшем обе капли падают с одинаковым ускорением и их скорости растут, но разность скоростей остается неизменной.

С помощью известной относительной скорости можно найти расстояние H между каплями другим способом. К моменту τ отрыва второй капли первая успевает удалиться от нее на расстояние $H_0 = g\tau^2/2$. С этого момента их относительное движение происходит с постоянной скоростью $v = g\tau$. Поэтому расстояние H в любой момент времени $t > \tau$ равно

$$H = H_0 + v(t-\tau).$$

Подставляя сюда значения H_0 и v, получаем прежний результат (7). Из этого способа решения становится совершенно ясным, почему расстояние между каплями увеличивается со временем по линейному закону, несмотря на то что пути, проходимые каждой каплей, зависят от времени квадратично.

Задумаемся над тем, всегда ли полученное здесь решение задачи имеет смысл. В условии ничего не было сказано о высоте крыши над поверхностью земли. Между тем очевидно, что для низкой крыши первая капля может упасть на землю раньше, чем оторвется вторая. Чтобы обе капли одновременно находились в воздухе, как это предполагалось в приведенном решении задачи, нужно, чтобы высота крыши была не меньше чем $g\tau^2/2 \approx 5$ м. А поставленный в задаче вопрос имеет смысл, только если высота крыши не меньше чем $h_1 = gt^2/2 \approx 20$ м — расстояние, пройденное первой каплей за 2 с.

Итак, мы видим, что некоторые не указанные в условии задачи параметры, формально не входящие в ответ, могут решающим образом влиять на условие его применимости. Так, в данной задаче полученный ответ $H = 15$ м имеет смысл только при условии, что высота крыши не меньше 20 м.

Что касается интервала между моментами падения капель на землю, то он, очевидно, равен интервалу τ между моментами отрыва капель независимо от высоты крыши. Приведите различные способы обоснования этого факта!

2. *Гонки у светофора*. Автомобиль, стоящий у светофора, может разогнаться с места до максимальной разрешенной скорости $v_1 = 60$ км/ч за время $\tau = 6$ с. В тот момент, когда загорается зеленый свет и автомобиль трогается с места, его обгоняет грузовик, движущийся с постоянной скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Сколько времени понадобится, чтобы обогнать грузовик, не нарушая правил движения? На каком расстоянии от светофора это произойдет? Какова будет в этот момент скорость автомобиля?

Решение. Ясно, что в принципе здесь имеются две возможности: автомобиль может догнать грузовик, либо еще продолжая разгоняться, либо уже достигнув максимальной разрешенной скорости и двигаясь равномерно. Конечно, полезно было бы с самого начала увидеть, которая из этих возможностей реализуется в данном случае. Это зависит от числовых значений приведенных в условии задачи параметров.

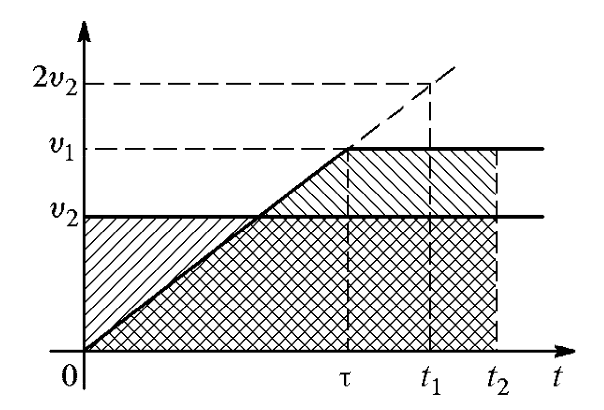


Рис. 43. Площади под графиками скорости для двух движений, рассматриваемых в задаче 2

Рассмотрим построенные на одном чертеже графики скорости автомобиля и грузовика (рис. 43). Пройденный каждым из них путь к моменту времени t определяется площадью под соответствующим графиком. Легко видеть, что автомобиль мог бы поравняться с грузовиком, продолжая при этом разгоняться, только при условии, что он может достичь скорости $2v_2$. Именно при достижении такой скорости в некоторый момент времени t_1 площадь треугольника будет равна

площади прямоугольника $v_2 t_1$. Однако $2v_2 = 80$ км/ч, что превосходит максимальную разрешенную скорость. Поэтому автомобиль догонит грузовик, уже закончив разгон и двигаясь с постоянной скоростью $v_1 60$ км/ч.

Момент времени t_2 когда это произойдет, можно найти, представив пройденный автомобилем путь как сумму пути на участке разгона, равного $v_1\tau/2$, и пути при равномерном движении $v_1(t_2 - \tau)$ и приравнивая эту сумму пути $v_2 t_2$, пройденному грузовиком:

$$\frac{v_1\tau}{2} + v_1(t_2 - \tau) = v_2 t_2.$$

Отсюда

$$t_2 = \tau \frac{v_1}{2(v_1 - v_2)} = 9 \text{ с}.$$

Отметим еще раз, что этот результат справедлив только при $v_1 < 2v_2$.

Расстояние s от светофора в момент времени t_2 равно

$$s = v_2 t_2 = 100 \text{ м}.$$

При подстановке в эту формулу значений v_2 и t_2 необходимо согласовать единицы, т. е. либо выразить скорость v_2 в метрах в секунду, либо время t_2 — в часах.

3. *Вверх и вниз.* Подброшенное вертикально вверх тело пролетает через расположенную на высоте h точку A дважды с интервалом времени τ. С какой скоростью тело упадет на землю? Сколько времени оно находилось в полете?

Решение. Высота h, на которой находится тело в момент времени t, выражается формулой (5). Поскольку начальная скорость v_0 направлена вертикально вверх, а ускорение g — вертикально вниз, то для нашего случая формула (5) принимает вид

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Подчеркнем, что это соотношение описывает весь полет брошенного вверх тела — как подъем, так и спуск. Это квадратное уравнение относительно момента времени t, в который тело находится на высоте h. Решая его, находим

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}. \quad (8)$$

По условию задачи тело побывало на высоте h дважды, поэтому корни t_1 и t_2 должны быть вещественными. Это значит, что дискриминант положителен:

$$\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g} > 0, \quad (9)$$

откуда $v_0^2 > 2gh$. При меньшей начальной скорости тело вообще не достигло бы высоты h. Из (8) видно, что один из корней меньше величины $v_/g$, равной времени подъема тела до максимальной высоты $H = v_0^2/(2g)$. Он соответствует прохождению тела через точку A при подъеме. Второй корень, как легко видеть, больше, чем v_0/g, но в силу (9) меньше полного времени полета,

равного $2v_0/g$. Очевидно, что заданный в условии задачи промежуток времени τ равен разности корней (8):

$$\tau = 2\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}.$$

Отсюда для начальной скорости v_0 тела имеем

$$v_0^2 = 2gh + \frac{g^2\tau^2}{4}.$$

С такой же по модулю скоростью тело упадет на землю. Для полного времени полета $2v_0/g$ отсюда получаем значение $\sqrt{8h/g + \tau^2}$.

Эту задачу можно решить проще, не прибегая к уравнению движения (5), если воспользоваться тем, что время подъема на максимальную высоту и время падения с нее до прежнего уровня одинаковы. Очевидно, что тело поднималось от высоты h до максимальной в течение $\tau/2$ и столько же времени падало обратно. Поэтому, достигнув высоты h при спуске, оно имело там скорость $v_1 = g\tau/2$. Применяя к дальнейшему падению с высоты h до поверхности земли формулу (6), можем написать выражение для скорости v в момент падения:

$$v^2 = v_1^2 + 2gh = 2gh + \frac{g^2\tau^2}{4}.$$

В предельном случае $\tau \to 0$ эта формула переходит в известное выражение $v_2 = 2gh$ для скорости падения с высоты h.

△ **Формулы равноускоренного движения**. Как и раньше, ускорение a_l, определяемое формулой (1), можно выразить, используя понятие производной:

$$a_l = \frac{dv_l}{d\tau} = \dot{v}_l. \tag{10}$$

Как отмечалось выше, при любой зависимости скорости от времени расстояние l от начальной точки изображается площадью между графиком скорости и осью времени (см. рис. 41). В математике такая площадь под графиком функции $v(t)$ дается определенным интегралом:

$$l = \int_0^t v(t)\,dt. \tag{11}$$

В тех случаях, когда на всем интервале от 0 до t скорость $v > 0$ (т. е. движение происходит все время в одном направлении), этот интеграл получается положительным ($l > 0$). Если же направление движения изменялось, то промежуток времени, на котором $v < 0$ (т. е. движение происходит в обратную сторону), дает отрицательный вклад в значение интеграла (11). Для нахождения пути, пройденного телом за все время движения от 0 до t, достаточно заменить в формуле (11) $v(t)$ под интегралом на $|v(t)|$.

При движении с постоянной скоростью $v = \text{const}$ интеграл дает площадь прямоугольника $l = vt$. В случае равноускоренного движения, когда $v = v_0 + at$, интеграл дает площадь трапеции:

$$l = \int_0^t (v_0 + at)\,dt = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t\,dt = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

что совпадает с формулой (5а).

Аналогично формуле (11) может быть записано выражение для мгновенной скорости при неравномерном движении с произвольным ускорением $a(t)$. Это можно увидеть из аналогии между формулами $\Delta v = a\,\Delta t$ и $\Delta l = v\,\Delta t$. Поэтому приращение скорости $v - v_0$ за промежуток времени от 0 до t записывается в виде

$$v - v_0 = \int_0^t a(t)\,dt. \qquad (12)$$

Геометрически это приращение скорости изображается площадью под графиком зависимости ускорения от времени $a(t)$. В частном случае движения с постоянным ускорением $a = \text{const}$ формула (12) дает

$$v = v_0 + at,$$

что совпадает с формулой (3).

З а д а ч а

4. *Путь как площадь под графиком скорости.* График зависимости скорости тела от времени имеет вид трети окружности (рис. 44), причем максимальное значение скорости равно v. Найдите пройденный путь s, если время движения равно t.

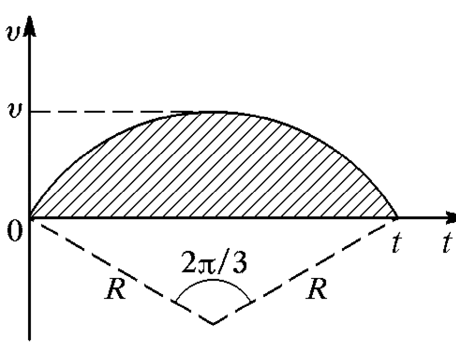


Рис. 44. Путь, геометрически изображаемый площадью под графиком скорости

Р е ш е н и е. Пройденный телом путь s изображается площадью под графиком скорости. В данном случае это площадь сегмента с центральным углом $2\pi/3$. Обозначив через R радиус окружности, дуга которой представляет собой график скорости, для площади сегмента можно написать следующее выражение, рассматривая ее как разность площадей сектора и треугольника (рис. 44):

$$s = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0{,}61R^2. \qquad (13)$$

Из соображений размерности очевидно, что ответ должен иметь вид $s = kvt$, где k — некоторый безразмерный (числовой) коэффициент. Поэтому в формуле (13) нужно выразить в R^2 одно R через v, а другое — через t. Из рис. 44 видно, что R можно выразить либо через

v как $R = 2v$, либо через t как $R = t/\sqrt{3}$. Таким образом, для пройденного пути s получаем

$$s = 0{,}61 \frac{2}{\sqrt{3}} vt = 0{,}71vt. \qquad (14)$$

Проделанная процедура восстановления правильной размерности в формуле (14) на первый взгляд кажется весьма искусственной. Однако она необходима всегда, когда пройденный путь подсчитывается не как интеграл от скорости по формуле (11), а как площадь геометрической фигуры, выражаемая через какой-либо один ее линейный размер. Ведь изменение масштаба графика по одной из осей изменяет форму геометрической фигуры. В нашем случае вместо дуги окружности график скорости при этом превратился бы в часть эллипса. Поэтому формула (13) справедлива только при вполне определенном соотношении масштабов по осям t и v.

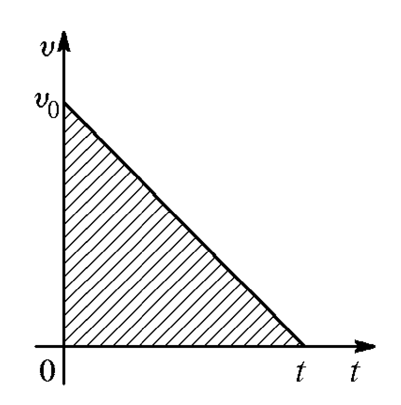


Рис. 45. Путь $s = v_0 t/2$ как площадь под графиком скорости при равнозамедленном движении

Сказанное можно пояснить на более простом примере, когда график скорости имеет вид, показанный на рис. 45. Пройденный путь равен, очевидно, $v_0 t/2$. Однако если в условии задачи указать, что график скорости образует с осями равнобедренный треугольник, то может возникнуть соблазн записать пройденный путь как $v_0^2/2$ либо как $t^2/2$, что, разумеется, нельзя рассматривать как окончательный ответ в физической задаче. При изменении масштаба по одной из осей треугольник перестает быть равнобедренным и подобное искушение уже не возникает. ▲

§ 11. Движение по окружности

Важным частным случаем движения частицы по заданной траектории является движение по окружности. Положение частицы на окружности (рис. 46) можно задавать, указывая не расстояние l от некоторой начальной точки A, а угол φ, образуемый радиусом, проведенным из центра O окружности к частице, с радиусом, проведенным в начальную точку A.

Наряду со скоростью v_l движения по траектории, которая определяется как

$$v_l = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}, \qquad (1)$$

удобно ввести *угловую скорость*, характеризующую быстроту изменения угла φ:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Скорость движения по траектории v_l называют также *линейной* скоростью. Установим связь между линейной и угловой скоростями. Длина дуги l, стягивающей угол φ, равна $R\varphi$, где R — радиус окружности, а угол φ измерен в радианах. Поэтому $\Delta l = R\,\Delta\varphi$ и угловая скорость ω связана с линейной скоростью v_l соотношением

$$v_l = R\omega. \qquad (3)$$

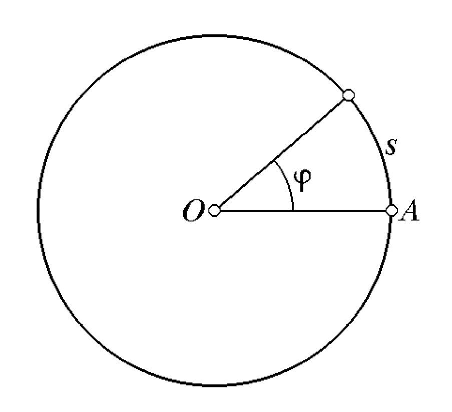


Рис. 46. Угол φ задает положение точки на окружности

Ускорение при движении по окружности, как и при произвольном криволинейном движении, имеет в общем случае две составляющие: тангенциальную, направленную по касательной к окружности и характеризующую быстроту изменения величины скорости v_l, и нормальную, направленную к центру окружности и характеризующую быстроту изменения направления скорости.

Значение нормальной составляющей ускорения, называемой в этом случае (движение по окружности) *центростремительным ускорением*, дается общей формулой (3) § 8, в которой теперь линейную скорость v_l можно выразить через угловую скорость ω с помощью формулы (3):

$$a_n = \frac{v_l^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (4)$$

Здесь радиус R окружности, разумеется, одинаков для всех точек траектории.

При равномерном движении по окружности, когда значение v_l постоянно, угловая скорость ω, как видно из (3), тоже постоянна. В этом случае ее иногда называют *циклической частотой*.

Период и частота. Для характеристики равномерного движения по окружности наряду с ω удобно использовать *период обращения* T, определяемый как время, в течение которого совершается один полный оборот, и *частоту* ν — величину, обратную периоду T, которая равна числу оборотов за единицу времени:

$$T = \frac{1}{\nu}. \qquad (5)$$

Из определения (2) угловой скорости следует связь между величинами ω, T и ν:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \qquad (6)$$

Это соотношение позволяет записать формулу (4) для центростремительного ускорения еще и в таком виде:

$$a_n = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 4\pi^2\nu^2 R.$$

Отметим, что угловая скорость ω измеряется в радианах в секунду, а частота ν — в оборотах в секунду. Размерности ω и ν одинаковы ($с^{-1}$), так как эти величины различаются лишь числовым множителем 2π.

Задача

По кольцевой дороге. Рельсы игрушечной железной дороги образуют кольцо радиуса R (рис. 47). Вагончик перемещается по ним, подталкиваемый стержнем O_1A, который поворачивается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг точки O_1, лежащей внутри кольца почти у самых рельсов. Как изменяется скорость вагончика при его движении?

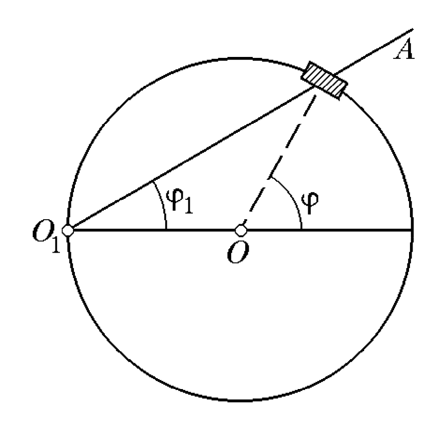


Рис. 47. К нахождению угловой скорости при движении по кольцевой дороге

Решение. Угол φ_1, образуемый стержнем O_1A с некоторым направлением, изменяется со временем по линейному закону: $\varphi_1 = \omega_1 t$. В качестве направления, от которого отсчитывается угол φ_1, удобно взять диаметр окружности, проходящий через точку O_1 (рис. 47). Точка O — центр окружности. Очевидно, что центральный угол φ, определяющий положение вагончика на окружности, в два раза больше вписанного угла φ_1, опирающегося на ту же дугу: $\varphi = 2\varphi_1$. Поэтому угловая скорость ω вагончика при движении по рельсам вдвое больше угловой скорости ω_1, с которой поворачивается стержень: $\omega = 2\omega_1$.

Таким образом, угловая скорость ω вагончика оказалась постоянной. Значит, вагончик движется по рельсам равномерно. Его линейная скорость v_l неизменна и равна

$$v_l = \omega R = 2\omega_1 R.$$

Ускорение вагончика при таком равномерном движении по окружности всегда направлено к центру O, а его модуль дается выражением (4):

$$a_n = \omega^2 R = 4\omega_1^2 R.$$

- Посмотрите на формулу (4). Как ее следует понимать: ускорение a_n все-таки пропорционально R или обратно пропорционально R?
- Объясните, почему при неравномерном движении по окружности угловая скорость ω сохраняет свой смысл, а T и ν теряют смысл?

△ **Угловая скорость как вектор.** В некоторых случаях угловую скорость удобно рассматривать как вектор, модуль которого равен ω, а неизменное направление перпендикулярно плоскости, в которой лежит окружность. С помощью такого вектора можно записать формулу, аналогичную (3), которая выражает вектор скорости $\mathbf{v}$ частицы, движущейся по окружности.

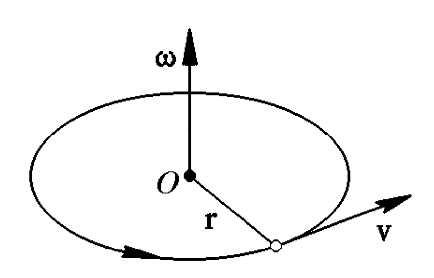


Рис. 48. Вектор угловой скорости

Поместим начало отсчета в центр O окружности. Тогда при движении частицы ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ будет только поворачиваться с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а его модуль все время равен радиусу R окружности (рис. 48). Видно, что вектор скорости $\mathbf{v}$, направленный по касательной к окружности, можно представить как векторное произведение вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на радиус-вектор $\mathbf{r}$ частицы:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \qquad (8)$$

Векторное произведение. По определению векторное произведение двух векторов представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы. Выбор направления векторного произведения производится по следующему правилу. Первый сомножитель мысленно поворачивается в сторону второго, как если бы это была рукоятка гаечного ключа. Векторное произведение направлено в ту же сторону, куда при этом стал бы перемещаться винт с правой резьбой.

Если сомножители в векторном произведении поменять местами, то оно изменит направление на противоположное: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Это значит, что векторное произведение некоммутативно.

Из рис. 48 видно, что формула (8) будет давать правильное направление для вектора $\mathbf{v}$, если вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен именно так, как показано на этом рисунке. Поэтому можно сформулировать следующее правило: направление вектора угловой скорости совпадает с направлением движения винта с правой резьбой, головка которого поворачивается в ту же сторону, в которую движется частица по окружности.

По определению модуль векторного произведения равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла α между ними:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha. \qquad (9)$$

В формуле (8) перемножаемые векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$ перпендикулярны друг другу, поэтому $\sin \alpha = 1$ и $v = \omega R$, как и должно быть в соответствии с формулой (3).

- Что можно сказать о векторном произведении двух параллельных векторов?
- Как направлен вектор угловой скорости стрелки часов? Чем различаются эти векторы для минутной и часовой стрелок?▲

§ 12. Равнопеременное движение в пространстве

Рассмотрим движение частицы, при котором вектор ускорения **a** постоянен. Примером такого движения может служить свободный полет брошенного с произвольной начальной скоростью тела в поле тяжести Земли, когда сопротивление воздуха несущественно.

При постоянном ускорении $\mathbf{a} = \text{const}$ в формуле, определяющей ускорение, промежуток времени Δt может быть любым, и поэтому приращение скорости Δv за промежуток Δt можно записать в виде

$$\Delta v = \mathbf{a}\,\Delta t. \qquad (1)$$

Выбирая в качестве Δt промежуток времени от 0 до t, для скорости $\mathbf{v}(t)$ в момент времени t получаем

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \qquad (2)$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость при $t = 0$: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$.

Перемещение в пространстве. Формулу (2) можно интерпретировать как результат сложения скоростей двух независимых прямолинейных движений, в которых одновременно участвует частица: равномерного движения с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ в направлении вектора $\mathbf{v}_0$ и равноускоренного движения с ускорением **a** без начальной скорости в направлении вектора **a**.

Если бы тело участвовало только в одном из этих движений, то легко было бы написать выражения для его перемещений. В первом случае это был бы вектор, равный $\mathbf{v}_0 t$, а во втором случае — вектор, равный $\mathbf{a}t^2/2$. В самом деле, в этих случаях траектория движения — прямая, а расстояние вдоль нее от начальной точки равно соответственно $v_0 t$ и $at^2/2$. В полном согласии с принципом независимости перемещений при одновременном участии тела в этих двух движениях его перемещение $\Delta\mathbf{r}$ равно векторной сумме $\mathbf{v}_0 t$ и $\mathbf{a}t^2/2$. Если поместить начало отсчета в точку, где находилось тело при $t = 0$, то вектор перемещения $\Delta\mathbf{r}$ за промежуток времени от 0 до t совпадает с его радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$ в момент времени t. Поэтому

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}. \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что скорость тела в момент t, если ее найти с помощью формулы (3), совпадает с выражением (2). В частном слу-

чае движения тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести Земли, формула (3) принимает вид

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз и равный по модулю приблизительно 9,8 м/с^2.

Хотя каждое из двух рассматриваемых при получении формулы (3) движений происходит по прямой, результирующее движение тела происходит по криволинейной траектории, если, разумеется, направления векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{a}$ не совпадают. Эта криволинейная траектория, однако, лежит в той же плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{a}$.

Задачи

1. *Дальность полета.* Тело брошено с поверхности земли под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с и упало на землю через время $t = 1{,}5$ с. На каком расстоянии от начальной точки оно упало?

Решение. Для рассматриваемого движения справедлива формула (4):

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}. \qquad (5)$$

Найдем геометрический образ этого векторного уравнения. Попробуем нарисовать треугольник, соответствующий равенству (5). Так как по условию задачи точка A падения тела находится на поверхности земли, проведенный в нее из начальной точки O вектор $\mathbf{r}$ направлен горизонтально (рис. 49). Вектор $\mathbf{v}_0 t$ выходит из начальной точки O и направлен вдоль $\mathbf{v}_0$ под некоторым углом к горизонту. Вектор $\mathbf{g}t^2/2$ направлен вертикально вниз и заканчивается в той же точке A, что и вектор $\mathbf{r}$. Поэтому получившийся треугольник прямоугольный. Расстояние l, равное модулю вектора $\mathbf{r}$, можно найти с помощью теоремы Пифагора:

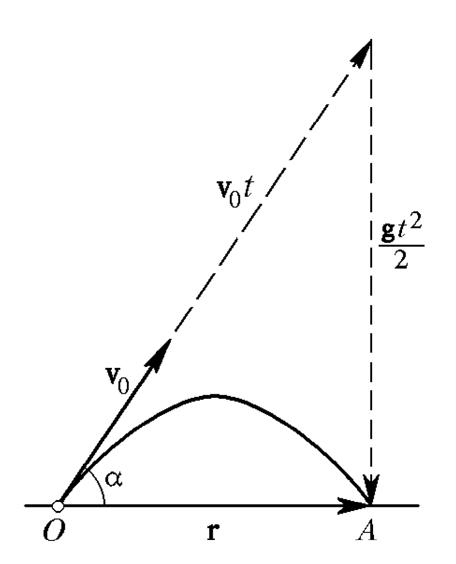


Рис. 49. Перемещение $\mathbf{r}$ как сумма двух слагаемых $\mathbf{v}_0 t$ и $\mathbf{g}t^2/2$

$$l = \sqrt{(v_0 t)^2 - \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2}. \qquad (6)$$

Подставляя в (6) заданные значения v_0 и t и $g \approx 9{,}8$ м/с^2, находим искомую дальность полета $l = 10{,}2$ м.

Обратим внимание на то, что формально при заданном времени полета дальность не зависит от угла, под которым брошено тело. Дело в том, что данные условия задачи однозначно определяют этот угол. Из рис. 49 видно, что $\sin\alpha = gt/(2v_0)$. Подставляя значения v_0, t и g, находим $\sin\alpha = 0{,}735$.

Значения v_0 и t в условии задачи не могут быть произвольными. В самом деле, время полета t не может превышать значения $2v_0/g$, соответ-

ствующего вертикальному направлению начальной скорости. Это условие можно, разумеется, получить и непосредственно из выражения (6), если учесть, что физический смысл ответ имеет только тогда, когда подкоренное выражение неотрицательно. Можно получить его и из очевидного требования $\sin\alpha < 1$.

2. *Максимальная дальность.* Камень брошен с поверхности земли с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с, направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найдите дальность полета по горизонтали, т. е. расстояние до точки его падения на землю. При каком значении угла α дальность полета максимальна?

Решение. Очевидно, что полет камня описывается тем же уравнением (5), которому соответствует треугольник векторов, показанный на рис. 49. Выразив катет $gt^2/2$ через гипотенузу v_0t и синус угла α, можно найти время полета камня:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Теперь легко найти горизонтальный катет, который и равен искомой дальности полета камня:

$$l = v_0 t \cos\alpha = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (7)$$

При заданном значении начальной скорости v_0 дальность полета зависит от угла α. Наибольшая дальность полета достигается при $\alpha = 45°$, так как в (7) $\sin 2\alpha$ при этом принимает свое максимальное значение, равное единице.

Из формулы (7) следует, что любая дальность полета, меньшая максимальной дальности v_0^2/g, получается при двух значениях угла α, дополняющих

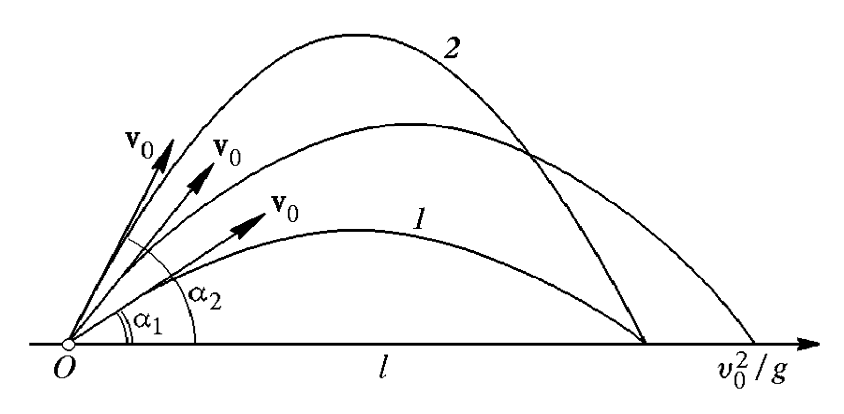


Рис. 50. Настильная (*1*) и навесная (*2*) траектории, проходящие через одну и ту же точку

друг друга до 90°. Значению угла α_1, меньшему 45°, соответствует пологая траектория, называемая настильной, а углу α_2, симметрично отклоняющемуся от 45° вверх, — крутая траектория, называемая навесной (рис. 50).

3. *Полет над склоном.* Камень бросают со склона горы с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, направленной под углом α к склону горы, образующему угол β с горизонтом. На каком расстоянии l вдоль склона от точки бросания упадет камень?

Решение. Движение камня по-прежнему описывается уравнением (5), но соответствующий ему треугольник векторов уже не будет прямоугольным (рис. 51). Вектор $\mathbf{r}$, соответствующий моменту падения, направлен вдоль склона горы в конечную точку A, вектор $\mathbf{v}_0 t$ направлен вдоль $\mathbf{v}_0$, вектор $\mathbf{g}t^2/2$ — вертикально вниз и заканчивается в точке A. Чтобы установить соотношение между сторонами этого треугольника, опустим из его вершины B перпендикуляр на сторону OA, соответствующую склону горы. Выражая высоту BC треугольника через гипотенузы двух примыкающих к ней прямоугольных треугольников, приходим к равенству

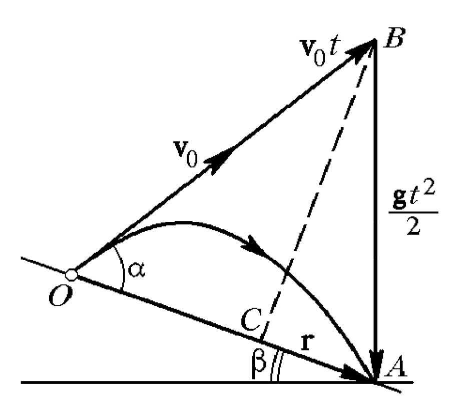


Рис. 51. Результирующее перемещение $\mathbf{r}$ как сумма векторов $\mathbf{v}_0 t$ и $\mathbf{g}t^2/2$

$$v_0 t \sin\alpha = \frac{gt^2}{2}\cos\beta,$$

откуда находим время полета t:

$$t = \frac{2v_0}{g}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Если подставить найденное значение t в $v_0 t$ и $gt^2/2$, то получим значения модулей соответствующих векторов, т. е. длины сторон OB и BA рассматриваемого треугольника. Теперь искомое расстояние l вдоль склона горы можно найти как сумму длин отрезков OC и CA, выразив их как катеты соответствующих прямоугольных треугольников. После простых преобразований получаем

$$l = \frac{2v_0^2}{g}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \frac{2v_0^2}{g}\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\beta}\cos(\alpha-\beta).$$

Видно, что при $\beta = 0$ значение l переходит в найденное в предыдущей задаче значение дальности полета по горизонтали (7). Другой предельный случай, допускающий непосредственную проверку правильности ответа, — это $\alpha = \pi/2 + \beta$, что соответствует бросанию камня вертикально вверх. При этом $\cos(\alpha - \beta) = 0$, что дает $l = 0$ — камень упадет в ту же точку.

Задачи для самостоятельного решения

1. Мячик падает отвесно без начальной скорости на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, и упруго отражается от нее (при упругом ударе мячик отражается от плоскости подобно лучу света, сохраняя модуль своей скорости). На каком расстоянии l вдоль плоскости от точки отражения мячик снова ударится о наклонную плоскость, если из начальной точки до плоскости он пролетел расстояние h?

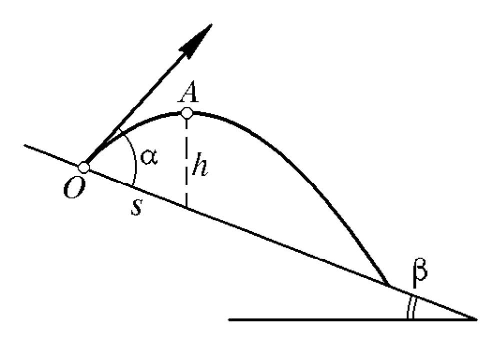


Рис. 52. Траектория над склоном горы

2. Камень брошен со склона горы с некоторой начальной скоростью, направленной под углом α к склону, образующему угол β с горизонтом. На каком расстоянии l вдоль склона от точки бросания упадет камень, если известно, что он пролетает через точ-

ку A, положение которой задано высотой h над склоном горы и расстоянием s вдоль склона от начальной точки (рис. 52)?

- Приведите соображения, подтверждающие справедливость уравнений (3) и (4). Сформулируйте условия их применимости.
- При каком направлении начальной скорости дальность полета брошенного тела будет наибольшей? Обеспечит ли такое направление начальной скорости наибольшую дальность при броске из точки, находящейся на некоторой высоте над землей?
- Что такое настильная и навесная траектории?

△ **Векторные формулы при a=const.** Из определения скорости как производной радиуса-вектора по времени:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

следует, что приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ за промежуток времени от 0 до t может быть выражено через $\mathbf{v}(t)$ с помощью определенного интеграла:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int_0^t \mathbf{v}(t)\, dt. \qquad (8)$$

При движении с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$ формула (8) дает

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}t. \qquad (9)$$

В случае равноускоренного движения, когда $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$, вычисление интеграла в формуле (8) дает

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t)\, dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}. \qquad (10)$$

В случае неравномерного движения с произвольным ускорением $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt$ для приращения скорости за промежуток времени от 0 до t можно написать

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_0^t \mathbf{a}(t)\, dt. \qquad (11)$$

При равноускоренном движении, когда $\mathbf{a} = \text{const}$, выражение (11) приводит, естественно, к формуле (2):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t. \ \blacktriangle$$

§ 13. Траектории

Рассмотренное выше описание движения частицы с помощью понятия радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$, изменяющегося со временем, основы-

валось на использовании определенной системы отсчета. Решение получавшихся векторных уравнений для перемещения частицы проводилось путем привлечения соответствующих им геометрических образов. В рассмотренных случаях при равномерном и равнопеременном движениях эти образы сводились к треугольникам, образованным складываемыми векторами.

Для многих задач, однако, интерес представляют не только перемещения частиц в пространстве, но и траектории их движения. Для исследования криволинейных траекторий удобно использовать другой математический аппарат, связанный с проецированием векторных уравнений на оси системы координат.

Системы координат. Наиболее простой и распространенной является так называемая *декартова система* координат, образованная тремя взаимно перпендикулярными осями. С помощью такой системы положение точки в пространстве можно задать, указав три ее координаты (рис. 53). Для нахождения декартовых координат x, y, z точки A нужно опустить из нее перпендикуляры на оси x, y, z (или на их продолжения). Координаты оснований этих перпендикуляров, т. е. точек A_1, A_2 и A_3, — это и есть декартовы координаты точки A. Иногда это проецирование бывает удобно выполнить в два этапа: сначала опустить из точки A перпендикуляр на одну из координатных плоскостей, например xy (рис. 53), а затем из точки A', т. е. проекции точки A на эту плоскость, опустить перпендикуляры на соответствующие оси.

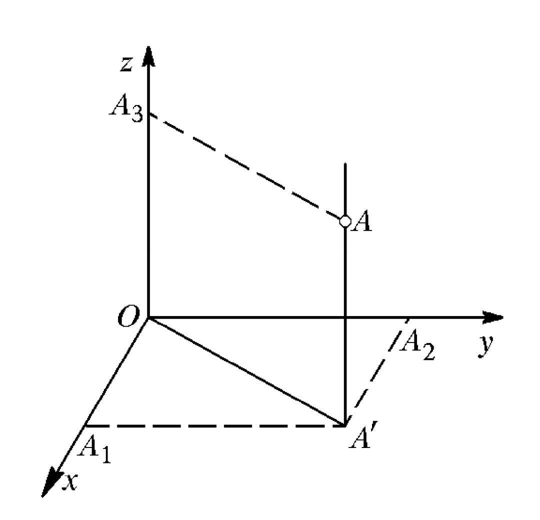


Рис. 53. Декартова система координат

Проекциями вектора, т. е. направленного отрезка, соединяющего две точки, называют разности координат точек конца и начала этого вектора.

Зафиксируем некоторую систему координат, связав ее начало и направления осей с определенным телом отсчета. Тогда для задания положения частицы в физическом пространстве вместо радиуса-вектора можно рассматривать три его проекции x, y, z на оси выбранной системы координат. Поскольку начало радиуса-вектора по определению всегда находится в начале координат, проекции радиуса-вектора просто совпадают с координатами x, y, z частицы.

Координаты как проекции радиуса-вектора. Таким образом, для описания движения частицы можно задавать либо одну векторную

функцию времени $\mathbf{r}(t)$, либо три скалярных функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. При этом любое векторное равенство, например

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}, \qquad (1)$$

эквивалентно трем скалярным, получаемым путем почленного проецирования его на оси выбранной системы координат:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}, \qquad (2)$$

где буквами с индексами x, y, z обозначены проекции векторов на соответствующие оси координат.

Подчеркнем, что одному и тому же векторному равенству (1) могут соответствовать различные системы равенств (2), потому что положение начала координат и ориентация осей координат в пространстве могут быть выбраны по-разному: с одной и той же физической системой отсчета можно связать различные системы координат. Их конкретный выбор определяется исключительно соображениями удобства.

Траектория — плоская кривая. Как мы видели, при движении с постоянным ускорением, которое описывается уравнением (1), траектория движения представляет собой плоскую кривую, т. е. все ее точки лежат в одной плоскости. Положение в пространстве плоскости, в которой происходит движение, задается векторами ускорения $\mathbf{a}$ и начальной скорости $\mathbf{v}_0$. Поэтому ориентацию осей координат всегда можно выбрать так, чтобы эта плоскость совпадала с одной из координатных плоскостей, например с плоскостью xy. Тогда векторное уравнение (1) сводится к двум скалярным — первым двум уравнениям системы (2). При этом еще остается произвол в выборе ориентации осей x и y, от которого зависит конкретный вид этих уравнений.

Напомним, что проекция вектора на ось равна произведению модуля этого вектора на косинус угла между направлением вектора и положительным направлением этой оси.

Сопоставим исследование векторного уравнения (1), описывающего движение с постоянным ускорением, двумя рассмотренными способами — опираясь на геометрический образ этого уравнения и проецируя его на оси выбранной системы координат. Для этого вернемся к задачам 1 и 2 § 12 и рассмотрим их решение вторым способом.

Поместим начало координат в точку, откуда бросают тело, и направим ось x по горизонтали, а ось y — вертикально вверх так, чтобы вектор начальной скорости $\mathbf{v}_0$ лежал в плоскости xy. Тогда проекции $\mathbf{v}_0$ на оси x и y будут равны соответственно $v_0 \cos\alpha$ и $v_0 \sin\alpha$, где α — угол, образованный вектором $\mathbf{v}_0$ с осью x. Проекции векто-

ра ускорения $\mathbf{g}$ на оси равны соответственно 0 и $-g$. Таким образом, вместо векторного уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}t^2/2$ получим

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \tag{3}$$

Полное время полета камня находится из второго уравнения, если положить в нем $y = 0$ — упавшее на землю тело находится на том же уровне, что и в момент бросания:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Подставляя это значение t в первое уравнение (3), находим дальность l по горизонтали (см. задачу 2):

$$l = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \tag{4}$$

Для ответа на вопрос задачи 1, когда в условии задано время полета, а не направление начальной скорости, нужно выразить $\sin\alpha$ из второго уравнения (3), положив в нем $y = 0$:

$$\sin\alpha = \frac{gt}{2v_0}. \tag{5}$$

Теперь для нахождения дальности полета остается подставить в первое уравнение (3) $\cos\alpha$, выразив его через $\sin\alpha$ из (5):

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{gt}{2v_0}\right)^2}.$$

В результате для дальности l полета получим

$$l = v_0 \cos\alpha \cdot t = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{gt}{2v_0}\right)^2}\, t,$$

что, разумеется, совпадает с приведенным в предыдущем параграфе ответом.

Рассмотренные примеры показывают эквивалентность обоих методов, хотя использование проекций на оси координат иногда приводит к более громоздким алгебраическим преобразованиям.

Рекомендуем попытаться решить этим методом еще и задачу 3 § 12 и обе приведенные там задачи для самостоятельного решения.

Удобство использования координат проявляется, как уже отмечалось, при исследовании формы траектории.

Уравнение траектории. Будем опять для определенности рассматривать свободное движение вблизи поверхности земли. В таком случае зависимость координат тела от времени дается уравнениями (3). Чтобы получить уравнение траектории $y = y(x)$, нужно исключить время из этих уравнений. Выражая t из первого уравнения:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

и подставляя во второе, получаем

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \qquad (6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sin \alpha / \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha$.

Соотношение (6) представляет собой уравнение параболы, проходящей через начало координат. Ее ветви направлены вниз, так как коэффициент при x^2 отрицателен. Найдем положение вершины траектории. Выделим в правой части (6) квадрат разности, рассматривая член, содержащий x^2, как квадрат первого слагаемого, а член, содержащий x, — как удвоенное произведение первого слагаемого на второе. Для этого нужно прибавить и вычесть некоторый свободный член, не содержащий x:

$$y = -\left(\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right) + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (7)$$

Легко видеть, что выражение в скобках представляет собой квадрат разности

$$\left(\sqrt{\frac{g}{2}} \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{v_0 \sin \alpha}{\sqrt{2g}}\right)^2. \qquad (8)$$

Очевидно, что максимум правой части (7) достигается при том значении x, при котором выражение (8) обращается в нуль:

$$x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \qquad (9)$$

Соответствующее максимальное значение правой части (7), т. е. высота вершины параболы, есть

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (10)$$

Координаты вершины параболической траектории (9) и (10) можно найти и более простым путем. Поскольку парабола — это симметричная кривая, ее вершина лежит посередине между точками пересечения с осью x. Одна из этих точек — начало координат $x = 0$, а другая соответствует максимальной дальности полета $x = l$ из формулы (4). Поэтому вершина параболы находится при $x = l/2$, что совпадает с (9). При этом ее высота $y_{\max}$ получается подстановкой этого значения x в уравнение траектории (6).

Независимость движений. Соотношения (9) и (10) можно получить и на основе принципа независимости движений. Рассматривая второе уравнение (3) как уравнение движения тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 \sin \alpha$, найдем максимальную высоту подъема $h = (v_0 \sin \alpha)^2/2g$, совпадающую с высотой

вершины параболы y_{max} из (10). Подставляя время подъема $t = v_0 \sin\alpha/g$ в первое уравнение (3), описывающее равномерное движение по горизонтали со скоростью $v_0 \cos\alpha$, найдем значение x-координаты этой вершины, совпадающее с (9). Но чтобы убедиться в том, что траектория представляет собой параболу, все равно необходимо обратиться к формуле (6).

Если интересоваться тем, как будет меняться траектория при изменении направления начальной скорости, т. е. угла α, то удобнее преобразовать уравнение траектории (6) таким образом, чтобы оно содержало только какую-нибудь одну тригонометрическую функцию угла α. Для этого воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Тогда

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

Подставляя это значение в (6), находим

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right). \qquad (11)$$

Уравнение (11) описывает семейство параболических траекторий, зависящее от двух параметров: модуля начальной скорости v_0 и угла α. Решение кинематических задач о свободном падении в однородном поле тяжести фактически сводится к исследованию этого семейства.

Граница достижимых целей. В качестве примера рассмотрим баллистическую задачу о стрельбе из ружья, пренебрегая сопротивлением воздуха. Прежде всего зададимся вопросом, как следует стрелять, чтобы попасть в цель, находящуюся на расстоянии l по горизонтали и на высоте h над горизонтальной плоскостью, проходящей через ружье (рис. 54). Стреляя в цель, мы можем менять наклон ствола ружья α, но, разумеется, мы не в силах менять значение начальной скорости v_0, так как она зависит от заряда патронов и устройства ружья. Будем считать v_0 известной заданной величиной. Под каким же углом к горизонту следует направить ствол ружья?

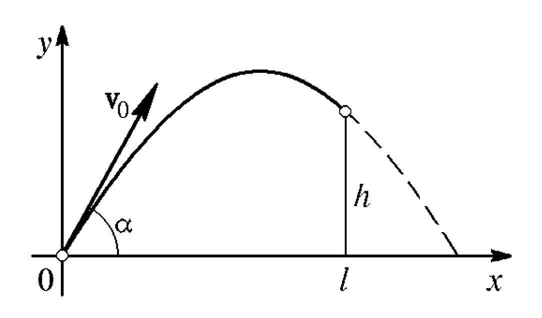


Рис. 54. Стрельба в цель, находящуюся на расстоянии l и высоте h

Чтобы ответить на этот вопрос, потребуем, чтобы траектория, описываемая уравнением (11), проходила через цель, т. е. точку с координатами $x = l$, $y = h$:

$$h = l\,\mathrm{tg}\,\alpha - (1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha)\,\frac{gl^2}{2v_0^2}. \qquad (12)$$

Это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$. Решая его, получаем для корней следующее выражение:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{gl}\left(v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gl^2 + 2v_0^2 h)}\right). \qquad (13)$$

Если дискриминант неотрицателен, т. е.

$$v_0^4 - g(gl^2 + 2v_0^2 h) \geqslant 0, \qquad (14)$$

то уравнение имеет вещественные корни и, следовательно, при данной начальной скорости пули в цель попасть можно. Если при этом дискриминант положителен, т. е. уравнение (12) имеет два различных вещественных корня, то в цель пуля может попасть по двум различным траекториям. Траектория с меньшим значением угла α называется настильной, с большим — навесной. При равном нулю дискриминанте, когда корни (13) совпадают, в цель при данном значении начальной скорости можно попасть единственным образом.

Если же дискриминант отрицателен, то уравнение (12) не имеет вещественных корней и в цель при данном значении v_0 попасть нельзя ни при каком значении угла α: ни одна из траекторий семейства (11) не «дотягивает» до этой цели. Отсюда ясно, что равенство нулю дискриминанта определяет ту минимальную начальную скорость $v_{\min}$, при которой еще можно попасть в данную цель:

$$v_{\min}^2 = (gh + \sqrt{h^2 + l^2}).$$

Для тангенса угла наклона ствола ружья при равном нулю дискриминанте имеем из (13)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{\min}}{gl} = \frac{h}{l} + \sqrt{\frac{h}{l} + 1}.$$

С другой стороны, при заданном значении v_0 равенство нулю дискриминанта определяет координаты наиболее удаленных целей, в которые еще можно попасть, т. е. границу области, простреливаемой из данного ружья. Выражая из (14) h в случае равенства, находим

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gl^2}{2v_0^2}. \qquad (15)$$

Эта формула определяет наибольшую высоту цели, находящейся на расстоянии l от ружья по горизонтали, в которую еще можно попасть при данном значении v_0. С ее помощью легко получить уравнение границы простреливаемой области, если заменить координаты определенной наиболее удаленной цели l и h на переменные величины x и y — координаты точек искомой границы:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \qquad (16)$$

Это уравнение параболы с вершиной при $x=0$, $y=v_0^2/(2g)$. Ее ветви направлены вниз и пересекают горизонтальную ось в точках $x=\pm v_0^2/g$ (рис. 55). Все траектории с данным v_0 при разных значениях α, т. е. семейство парабол (11), целиком лежат под этой границей, и каждая из траекторий касается границы в одной точке. Другими словами, граница является огибающей для семейства таких траекторий. Через каждую цель, расположенную ниже границы, проходят две траектории, причем навесная касается границы до попадания в цель.

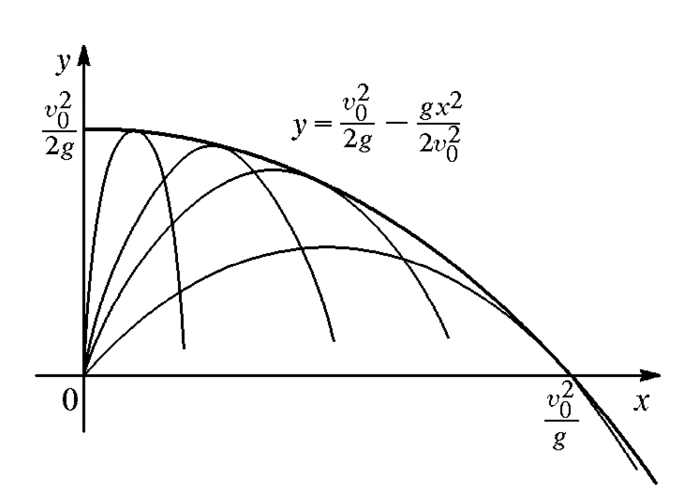


Рис. 55. Граница простреливаемой области

Фактически граница простреливаемой области представляет собой некоторую поверхность, а парабола (16) есть сечение этой поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат. Вся поверхность может быть получена вращением параболы (16) вокруг оси y.

Другой способ нахождения границы. Если с самого начала интересоваться только границей простреливаемой области, то ее можно найти сразу с помощью уравнения траектории (11). Действительно, рассмотрим цели, находящиеся на одной вертикали, отстоящей от ружья на расстояние x, и найдем на этой вертикали самую высокую точку, в которую еще может попасть пуля. Эта точка, очевидно, принадлежит границе. Таким образом, задача сводится к нахождению максимума y при заданном x, т. е. максимума квадратного трехчлена (11) относительно $\operatorname{tg}\alpha$. Квадратный трехчлен имеет максимум при $\operatorname{tg}\alpha_{max}=v_0^2/(gx)$. Соответствующее максимальное значение y получается подстановкой $\operatorname{tg}\alpha_{max}$ в (11). Результат совпадает с формулой (16).

Полученные выше результаты, как нетрудно убедиться, содержат все хорошо известные частные случаи. Так, например, максимальная высота подъема $y_{max}=v_0^2/(2g)$ получается из уравнения (16) при $x=0$, а наибольшая дальность полета пули по горизонтали при условии, что ружье и цель находятся на одной высоте, получается из (16) при $y=0$: $x_{max}=v_0^2/g$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Между целью и минометом, находящимися на одной горизонтали, расположена тонкая стена высотой h. Расстояние от миномета до стены

l_1, а от стены до цели — l_2. Определите минимальную начальную скорость мины, необходимую для поражения цели. Под каким углом при этом следует стрелять?

2. На какое максимальное расстояние можно бросить теннисный мяч в спортивном зале высотой $h = 8$ м, если начальная скорость мяча $v_0 = 10$ м/с? $v_0 = 20$ м/с? Под каким углом следует бросать мяч?

3. Найдите радиус кривизны параболической траектории в ее высшей точке, учитывая, что вектор ускорения там направлен по нормали к траектории. Начальная скорость v_0 направлена под углом α к горизонту.

4. С какой минимальной начальной скоростью можно бросить мячик, чтобы он смог перелететь через ангар с плоской крышей? Высота ангара $h = 6$ м, ширина $l = 10$ м.

- Почему траектория движения частицы с постоянным ускорением представляет собой плоскую кривую? Как расположена в пространстве плоскость, в которой лежит траектория?
- Сформулируйте правило нахождения проекции вектора на ось системы координат. В каком случае проекция будет положительной? отрицательной? равной нулю?
- В какой точке параболической траектории тела, брошенного под углом к горизонту, его скорость минимальна?
- Требуется попасть в цель, находящуюся на высоте h и расстоянии l от точки бросания. На первый взгляд кажется, что требуемая начальная скорость будет наименьшей, если высшая точка траектории совпадает с целью. Опровергните это утверждение.

△ **Нахождение экстремумов**. Нахождение координат вершины траектории можно выполнить с помощью известных правил исследования функции на экстремум на основе дифференциального исчисления. Положение максимума функции $y(x)$, задаваемой выражением (6), определяется приравниванием нулю производной $y'(x)$ по x. Вычисляя эту производную, имеем

$$\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha} = 0,$$

откуда для x получаем значение, даваемое формулой (9).

Аналогично можно поступать и в других случаях, где требуется нахождение экстремальных значений. Например, для определения минимального значения начальной скорости v_0, обеспечивающей попадание в цель, находящуюся на высоте h и расстоянии l, следует выразить из (12) v_0^2 как функцию переменной $z = \operatorname{tg}\alpha$, продифференцировать функцию $v_0^2(z)$ по z и приравнять производную нулю. Рассматривать следует только ту область значений z, где $v_0^2 > 0$, т. е. $z > h/s$. При этом получается квадратное относительно z уравнение, у которого один

из корней (положительный) дает направление начальной скорости, при котором ее модуль минимален. Второй корень физического смысла не имеет.

Обратимость движения. Используя представление о траектории, можно конкретизировать смысл обратимости механического движения, о которой упоминалось еще в самом начале при обсуждении свойств симметрии пространства и времени.

Рассмотрим движение частицы в заданном силовом поле, когда ее ускорение в каждой точке имеет определенное значение, не зависящее от скорости. Каким будет движение этой частицы, если в какой-либо точке ее траектории изменить направление скорости на противоположное? Математически это эквивалентно замене t на $-t$ во всех уравнениях. В уравнение траектории время не входит, и частица будет двигаться «вспять» по той же самой траектории. Более того, промежутки времени между прохождением двух любых точек траектории будут одинаковы как при прямом, так и при обратном движении. Каждой точке траектории соответствует определенное значение модуля скорости частицы независимо от направления движения по данной траектории.

Указанные свойства особенно наглядны для совершающего колебания маятника.

Все это справедливо, разумеется, лишь тогда, когда можно пренебречь трением — сопротивлением движению. Другими словами, обратимость движения имеет место тогда, когда выполняется закон сохранения механической энергии.

Задача

Обратимость движения. Стальной упругий шарик свободно падает без начальной скорости с некоторой высоты H. На какой высоте h и под

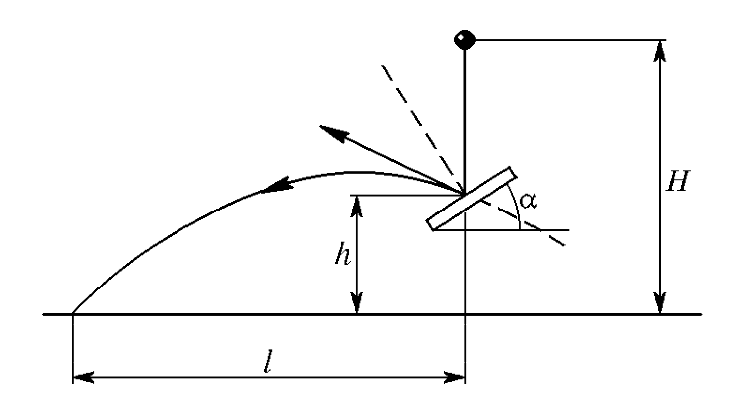


Рис. 56. Отражение падающего шарика от наклонной плиты

каким углом α к горизонту следует подставить мраморную плиту (рис. 56), чтобы упруго отскочивший от нее шарик улетел как можно дальше по горизонтали? Чему равна эта максимальная дальность?

Решение. Эту задачу можно решить вообще практически без всяких расчетов, если воспользоваться обратимостью механического движения. Будем рассуждать следующим образом. Пусть мы нашли такие значения h и α, при которых горизонтальная дальность полета отскочившего шарика оказалась максимальной. Скорость шарика в момент падения на землю равна $\sqrt{2gH}$ и не зависит от значения h и α. (Проще всего это увидеть, учитывая закон сохранения энергии.) Если в точке падения шарика на землю направление его скорости изменить на противоположное, то он проделает весь свой полет в обратном направлении и после отражения от плиты поднимется на прежнюю высоту. Естественно, что и в этом обращенном движении дальность его полета по горизонтали будет наибольшей. Но мы знаем, что наибольшая горизонтальная дальность полета при данной начальной скорости получается, если ее направление составляет угол 45° с горизонтом при условии, что точка падения находится на одном горизонтальном уровне с начальной точкой. При более высоком расположении точки падения

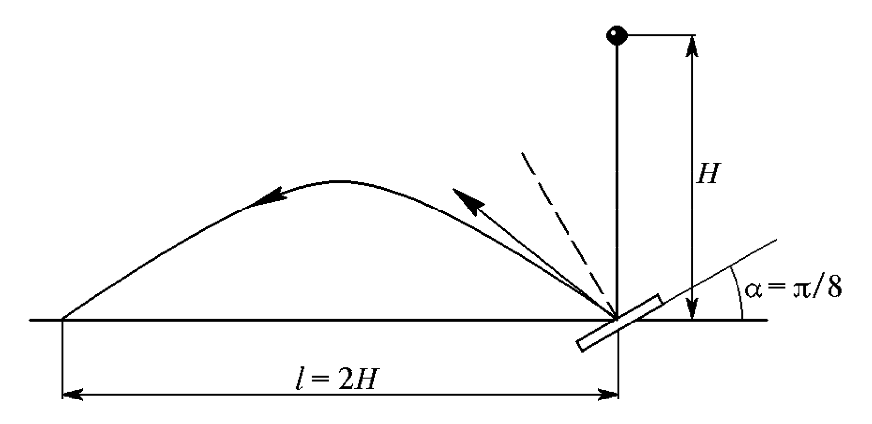


Рис. 57. Расположение плиты для наибольшей дальности полета шарика

горизонтальная дальность полета может только уменьшиться. Поэтому подставить плиту нужно как можно ниже, т. е. при $h = 0$, и ориентировать ее так, чтобы вектор скорости отскочившего шарика составлял угол 45° с горизонтом (рис. 57). Итак, плиту нужно наклонить на 22,5° к горизонту. В соответствии с формулой (4) максимальная дальность полета равна $2H$.

Из приведенных рассуждений ясно, что горизонтальную дальность полета можно было бы увеличить еще больше, если бы условие задачи позволяло расположить плиту ниже уровня земли. При этом, разумеется, плиту нужно наклонить на несколько меньший угол.

Задача для самостоятельного решения

В условии разобранной выше задачи плита, от которой отскакивает шарик, расположена на глубине h ниже уровня земли. Под каким углом α к горизонту следует наклонить плиту, чтобы получить максимальную горизонтальную дальность полета шарика? Какова эта максимальная дальность?

- Нарисуйте годограф вектора скорости тела, брошенного под углом к горизонту.

- Докажите, что в рассмотренной выше задаче дальность полета по горизонтали можно сделать больше $2H$, если поместить плиту ниже уровня земли и ориентировать ее должным образом.
- Докажите, что при наличии трения обратимость движения отсутствует. ▲

§ 14. Относительность механического движения

В самом начале изучения механического движения подчеркивался его относительный характер. Движение можно рассматривать в разных системах отсчета. Конкретный выбор системы отсчета диктуется соображениями удобства: ее следует выбирать так, чтобы изучаемое движение и его закономерности выглядели как можно проще.

Движение в разных системах отсчета. Для перехода от одной системы отсчета к другой необходимо знать, какие характеристики движения остаются неизменными, а какие при таком переходе изменяются и каким образом.

Начнем со времени. Опыт показывает, что, пока речь идет о движениях, происходящих со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, время «течет» одинаково во всех системах отсчета и в этом смысле может считаться абсолютным. Это значит, что промежуток времени между двумя событиями одинаков при его измерении в любой системе отсчета.

Перейдем к пространственным характеристикам. Положение частицы, определяемое ее радиусом-вектором $\mathbf{r}$, изменяется при переходе к другой системе отсчета. Однако относительное пространственное расположение двух событий при этом не меняется и в этом смысле является абсолютным. Например, от выбора системы отсчета не зависят относительное положение двух частиц в какой-то один момент времени, задаваемое разностью их радиусов-векторов $\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$, пространственные размеры твердых тел и т. п.

Таким образом, согласно классическим представлениям нерелятивистской физики промежутки времени и пространственные расстояния между одновременными событиями абсолютны. Эти представления, как выяснилось после создания теории относительности, справедливы лишь при сравнительно медленных движениях систем отсчета. В теории относительности представления о пространстве и времени претерпели существенные изменения. Однако новые релятивистские представления, пришедшие на смену классическим, переходят в них в предельном случае медленных движений.

Рассмотрим теперь изменение скорости движения частицы при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой. Вопрос этот тесно связан с принципом независимости перемещений, обсуждавшимся в § 5. Вернемся к примеру с пе-

реправой на пароме через фиорд, когда паром движется поступательно относительно берегов. Обозначим вектор перемещения пассажира относительно берегов (т. е. в системе отсчета, связанной с землей) через $\Delta\mathbf{r}$, а его перемещение относительно парома (т. е. в системе отсчета, связанной с паромом) — через $\Delta\mathbf{r}'$. Перемещение самого парома относительно земли за то же время Δt обозначим через $\Delta\mathbf{R}$. Тогда

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{R} + \Delta\mathbf{r}'. \tag{1}$$

Разделив это равенство почленно на время Δt, в течение которого эти перемещения произошли, и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим аналогичное (1) соотношение для скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}', \tag{2}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость пассажира относительно земли, $\mathbf{V}$ — скорость парома относительно земли, а $\mathbf{v}'$ — скорость пассажира относительно парома. Выражаемое равенством (2) *правило сложения скоростей* при одновременном участии тела в двух движениях можно трактовать как *закон преобразования скорости* тела при переходе от одной системы отчета к другой. В самом деле, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — это скорости пассажира в двух разных системах отсчета, а $\mathbf{V}$ — скорость одной из этих систем (парома) относительно другой (земли).

Таким образом, скорость $\mathbf{v}$ тела в какой-либо системе отсчета равна векторной сумме скорости $\mathbf{v}'$ этого тела в другой системе отсчета и скорости $\mathbf{V}$ этой второй системы отсчета относительно первой. Отметим, что выражаемый формулой (2) закон преобразования скоростей справедлив только для сравнительно медленных (нерелятивистских) движений, так как его вывод опирался на представление об абсолютном характере промежутков времени (значение Δt считалось одинаковым в двух системах отсчета).

Относительная скорость и ускорение. Из формулы (2) следует, что *относительная скорость* двух частиц одинакова во всех системах отсчета. В самом деле, при переходе к новой системе отсчета к скорости каждой из частиц прибавляется один и тот же вектор $\mathbf{V}$ скорости системы отсчета. Поэтому разность $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ векторов скоростей частиц при этом не изменяется. Относительная скорость частиц абсолютна!

Ускорение частицы в общем случае зависит от системы отсчета, в которой рассматривается ее движение. Однако ускорение в двух системах отсчета одинаково, когда одна из них движется равномерно и прямолинейно относительно другой. Это сразу следует из формулы (2) при $\mathbf{V} = \text{const}$.

При изучении конкретных движений или решении задач можно использовать любую систему отсчета. Разумный выбор системы отсчета может существенно облегчить получение необходимого ре-

зультата. В рассмотренных до сих пор примерах исследования движений этот вопрос не заострялся — выбор системы отсчета как бы навязывался самим условием задачи. Однако во всех случаях, даже когда выбор системы отсчета на первый взгляд очевиден, полезно задуматься о том, какая система отсчета действительно окажется оптимальной. Проиллюстрируем это на следующих задачах.

Задачи

1. *Вниз и вверх по течению*. Моторная лодка плывет вниз по течению с постоянной скоростью. В некотором месте с лодки в воду падает запасное весло. Через время $t = 10$ мин потеря обнаруживается и лодка поворачивает обратно. Какова скорость течения реки, если весло было подобрано на расстоянии $l = 1$ км ниже по течению от места потери?

Решение. Выберем систему отсчета, связанную с движущейся водой. В этой системе отсчета вода неподвижна и весло все время лежит в том месте, куда оно упало. Лодка сначала удаляется от этого места в течение времени t, затем поворачивает обратно. Обратный путь к веслу займет такое же время t, так как скорость лодки относительно воды не зависит от направления движения. За все это время $2t$ течение сносит весло на расстояние l относительно берегов. Поэтому скорость течения $u = l/(2t) = 1$ км/20 мин $= 3$ км/ч.

Чтобы убедиться в том, насколько удачный выбор системы отсчета облегчает здесь получение ответа на поставленный вопрос, решите эту задачу в системе отсчета, связанной с землей.

Обратим внимание на то, что приведенное решение не претерпевает изменений, если лодка плывет по широкой реке не вниз по течению, а под некоторым углом к нему: в системе отсчета, связанной с движущейся водой, все происходит, как в озере, где вода неподвижна. Легко сообразить, что на обратном пути нос лодки следует направить прямо на плывущее весло, а не на то место, где его уронили в воду.

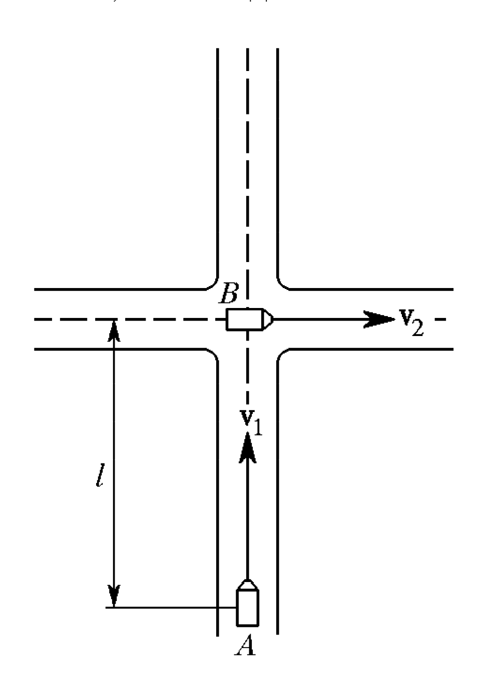


Рис. 58. Движение автомобилей по пересекающимся дорогам

2. *Перекресток дорог*. Две автомобильные дороги пересекаются под прямым углом (рис. 58). Движущийся по одной из них со скоростью v_1 автомобиль A находится на расстоянии l от перекрестка в тот момент, когда его пересекает автомобиль B, движущийся со скоростью v_2 по другой дороге. В какой момент времени расстояние между автомобилями по прямой будет минимальным? Чему оно равно? Где в этот момент находятся автомобили?

Решение. В этой задаче удобно связать систему отсчета с одним из автомобилей, например со вторым. В такой системе отсчета второй автомобиль неподвижен ($\mathbf{v}'_2 = 0$), а скорость $\mathbf{v}'_1$ первого равна его скорости относительно второго, т. е. разности $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ (рис. 59):

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

Движение первого автомобиля относительно второго происходит по прямой AC, направленной вдоль вектора $\mathbf{v}_1'$. Поэтому искомое кратчайшее расстояние $l_{\min}$ между автомобилями равно длине перпендикуляра BD, опущенного из точки B на прямую AC. Рассматривая подобные треугольники на рис. 59, имеем

$$l_{\min} = \frac{lv_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

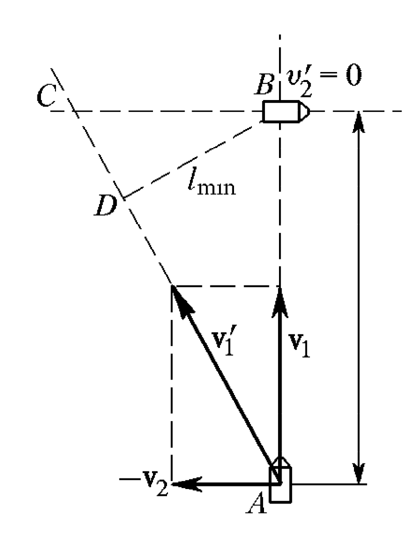


Рис. 59. Скорости в системе отсчета, связанной с одним из автомобилей

Время сближения автомобилей до этого расстояния можно найти, разделив длину катета AD на скорость $v_1' = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}$ первого автомобиля относительно второго:

$$t = \frac{lv_1}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Положения автомобилей в этот момент времени можно найти, сообразив, что в исходной системе отсчета, связанной с землей, второй автомобиль уедет от перекрестка на расстояние, равное $v_2 t$:

$$l_2 = v_2 t = l\,\frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Первый автомобиль за это время приблизится к перекрестку на расстояние $v_1 t$:

$$l_1 = v_1 t = l\,\frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

3. *Встречные поезда.* Два поезда одинаковой длины движутся навстречу друг другу по параллельным путям с одинаковой скоростью v. В момент, когда кабины тепловозов поравнялись друг с другом, один из поездов начинает тормозить и движется дальше с постоянным ускорением. Он останавливается спустя время t как раз в тот момент, когда поравнялись хвосты поездов. Найдите длину поезда.

Решение. Свяжем систему отсчета с равномерно движущимся поездом. В этой системе он неподвижен, а встречный поезд в начальный момент $t = 0$ имеет скорость $2v$. Движение второго поезда и в этой системе отсчета будет равнозамедленным. Поэтому средняя скорость $v_{\text{ср}}$ движения тормозящего поезда равна $(2v + v)/2 = 3v/2$. Пройденный за время торможения t путь (относительно первого поезда) равен общей длине двух поездов, т. е. $2l$. Поэтому

$$2l = v_{\text{ср}} t = \frac{3}{2}\,vt,$$

откуда находим

$$l = \frac{3}{4}\,vt.$$

Обратим внимание на то, что в этой задаче переход в движущуюся систему отсчета использовался для рассмотрения неравномерного движения тела, однако движение самой системы отсчета было равномерным. Следующие задачи

показывают, что иногда бывает удобно переходить в ускоренно движущуюся систему отсчета.

4. «*Охотник и обезьянка*». При стрельбе по горизонтально движущейся цели опытный охотник прицеливается с некоторым «упреждением», поскольку за время полета дроби цель успевает переместиться на некоторое расстояние. Куда он должен целиться при стрельбе по свободно падающей мишени, если выстрел производится одновременно с началом ее падения?

Решение. Выберем систему отсчета, связанную со свободно падающей мишенью. В этой системе отсчета мишень неподвижна, а дробинки летят равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{v}_0$, приобретаемой в момент выстрела. Так происходит потому, что свободное падение всех тел в системе отсчета, связанной с землей, происходит с одинаковым ускорением $\mathbf{g}$.

В системе отсчета, свободно падающей с ускорением $\mathbf{g}$, где мишень неподвижна, а дробинки летят прямолинейно, становится очевидным, что целиться нужно точно в мишень. Этот факт не зависит от значения начальной скорости дробинок — она может быть любой. Но при слишком малой начальной скорости дробинки могут просто не успеть долететь до мишени, пока она находится в свободном падении. Если мишень падает с высоты h, а начальное расстояние до нее по прямой равно l, то, как легко убедиться, должно быть выполнено неравенство

$$\frac{l}{v_0} < \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

откуда и получается ограничение на начальную скорость дробинок:

$$v_0^2 > \frac{gl^2}{2h}.$$

При меньшей начальной скорости дробинки упадут на землю раньше мишени.

5. *Граница достижимых целей*. В предыдущем параграфе была найдена граница простреливаемой области при заданном значении начальной скорости v_0. Все рассуждения проводились в системе отсчета, связанной с Землей. Найдите эту границу, рассматривая движение в свободно падающей системе отсчета.

Решение. Предположим, что частицы вылетают из начальной точки одновременно по всем направлениям с одинаковым значением начальной скорости v_0. Если бы земное притяжение отсутствовало, частицы двигались бы равномерно и прямолинейно и в любой момент времени t находились бы на сфере радиуса $r(t) = v_0 t$ с центром в начальной точке. Такое «выключение» силы тяжести эквивалентно переходу в свободно падающую систему отсчета. В системе отсчета, связанной с землей, вся эта расширяющаяся с течением времени сфера еще и падает с ускорением свободного падения g, и ордината ее центра в момент t равна $-gt^2/2$.

Для нахождения границы «простреливаемой» области достаточно рассмотреть сечение этой сферы вертикальной плоскостью xy, проходящей через начальную точку. Это сечение представляет собой окружность радиуса $r = v_0 t$, которая «падает» с ускорением свободного падения $\mathbf{g}$. Ее уравнение имеет вид

$$x^2 + \left(y + \frac{gt^2}{2}\right)^2 = v_0^2 t^2. \qquad (3)$$

На самом деле это уравнение целого семейства окружностей: придавая t разные значения, получаем окружности, на которых находятся частицы в различные моменты времени. Искомая граница — это огибающая такого семейства окружностей (рис. 60). Очевидно, что высшая ее точка лежит над точкой вылета частиц.

Будем искать границу следующим образом. Заметим, что вылетевшие в один и тот же момент времени частицы достигают границы в разные

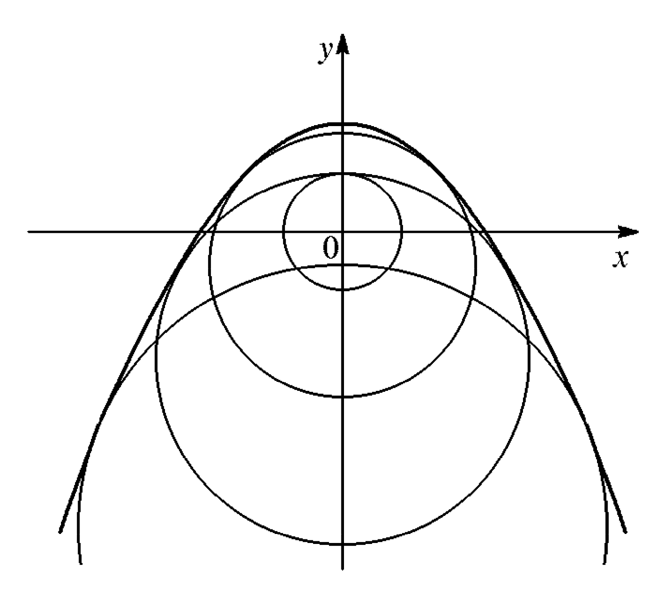


Рис. 60. Граница достижимых целей как огибающая семейства окружностей

моменты времени: граница касается разных окружностей. Проведя горизонтальную прямую на некотором уровне y, найдем на ней наиболее удаленную от оси ординат точку, которой еще достигают частицы, не задумываясь о том, какой окружности эта точка принадлежит. Абсцисса x этой точки, очевидно, удовлетворяет уравнению (3) семейства окружностей. Переписав его в виде

$$x^2 = v_0^2 t^2 - \left(\frac{gt^2}{2} + y\right)^2,$$

убеждаемся, что правая часть представляет собой квадратный трехчлен относительно t^2:

$$x^2 = -\frac{g^2 t^4}{4} + (v_0^2 - gy)t^2 - y^2.$$

Его максимальное значение при фиксированном значении у есть

$$x^2 = \frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2v_0^2}{g}y.$$

Выражая отсюда y как функцию x, получаем уравнение границы простреливаемой области:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

совпадающее с найденным ранее. Подчеркнем, что здесь граница получена как огибающая семейства окружностей, на которых находились частицы, вылетевшие в один и тот же момент времени. Так как траектория каждой

отдельной частицы представляет собой параболу в системе отсчета, связанной с Землей, то эта граница одновременно является огибающей таких парабол.

- Какие из кинематических величин изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой, а какие остаются неизменными?
- Объясните, почему относительная скорость двух частиц одинакова во всех системах отсчета.
- Приведите аргументы, свидетельствующие о том, что классический закон преобразования скорости при переходе от одной системы отсчета к другой опирается на представление об абсолютном характере времени.
- Каким должно быть относительное движение двух систем отсчета, чтобы при переходе от одной из них к другой ускорение частицы изменялось?

II. ДИНАМИКА

Кинематика дает математическое описание механического движения, не останавливаясь на физических причинах того, почему движение происходит именно таким образом. Динамика изучает механическое движение, вскрывая причины, придающие движению тот или иной характер. Основу динамики составляют законы Ньютона, которые по существу представляют собой обобщение большого числа опытных фактов и наблюдений.

§ 15. Инерция. Первый закон Ньютона

Объяснение причин механического движения в динамике основывается на использовании представлений о *взаимодействии* тел. Взаимодействие тел — это причина *изменения скорости* их движения, т. е. *ускорения*. Ускорение тела в данный момент времени определяется положением и движением окружающих тел.

Системы отсчета в динамике. В кинематике все системы отсчета равноправны и одинаково допустимы. В динамике естественно попытаться выбрать систему отсчета таким образом, чтобы механическое движение в ней выглядело наиболее просто. Следуя историческому опыту человечества, начнем рассуждения в системе отсчета, связанной с Землей.

Начиная с Аристотеля, на протяжении почти двадцати веков существовало предубеждение, что на Земле движение с постоянной скоростью нуждается для своего поддержания во внешнем воздействии, а при отсутствии такого воздействия движение прекращается, тело приходит в состояние покоя. Казалось бы, весь опыт наблюдений за происходящими вокруг нас движениями свидетельствует именно об этом.

Понадобился гений Галилея и Ньютона, чтобы увидеть истинную, совершенно иную картину мира и осознать, что объяснения требует не движение с постоянной скоростью, а изменение скорости. Состояние движения с постоянной скоростью эквивалентно состоянию покоя в том смысле, что, как и покой, оно является естественным, не требующим никакого «объяснения», никакой причины. Иными словами, в состоянии покоя нет ничего исключительного. О том, насколько труден был этот шаг, можно судить хотя бы по тому

факту, что Галилей сделал его лишь наполовину: он считал, что прямолинейное движение сохраняется только в земных масштабах, а для небесных тел «естественным», сохраняющимся движением является круговое.

Движение по инерции. Движение тела, происходящее без внешних воздействий, принято называть *движением по инерции*. В земных условиях такие движения практически не встречаются. К представлению о движении по инерции можно прийти в результате *экстраполяции* к идеализированным условиям. Представим себе, например, скольжение льдинки по горизонтальной поверхности. Если эта поверхность шероховатая, как асфальт, запущенная по ней льдинка довольно быстро остановится. Но в гололед, когда поверхность асфальта покрыта тонким слоем льда, скольжение льдинки будет продолжаться гораздо дольше. Можно думать, что в предельном случае идеально гладкой поверхности такое движение продолжалось бы неограниченно долго.

В школьном кабинете физики почти идеальные условия движения по инерции можно осуществить с помощью «воздушной дорожки», где трение о поверхность почти отсутствует (рис. 61). Выходящий из маленьких отверстий сжатый воздух создает «воздушную

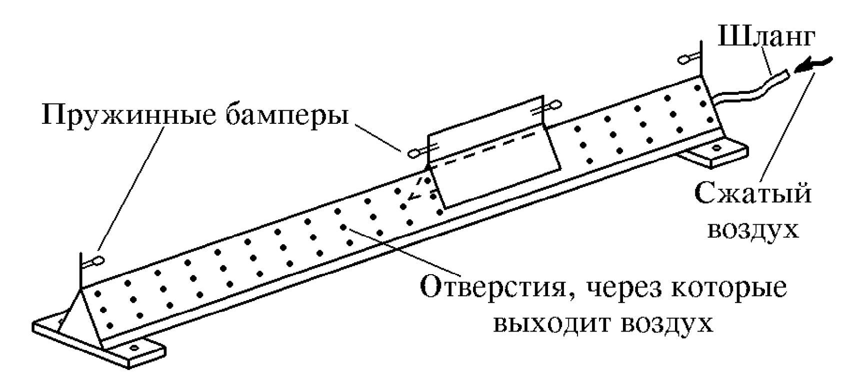


Рис. 61. Дорожка с воздушной подушкой, обеспечивающей движение с очень малым ускорением

подушку», поддерживающую тележку-бегунок, и после легкого толчка тележка долго движется с неизменной по модулю скоростью, упруго отражаясь от концов дорожки с помощью пружинных бамперов. Таким образом, создается впечатление, что в отсутствие внешних воздействий тело сохраняет состояние покоя или движения с постоянной скоростью.

Посмотрим теперь, что получится, если опыт с воздушной дорожкой проделать в вагоне движущегося поезда. Оказывается, что при равномерном прямолинейном движении поезда относительно Земли все происходит точно так же, как и в кабинете физики. Однако при разгоне поезда, торможении, движении по закруглению и при тряске на неровностях пути все происходит иначе.

Например, при трогании поезда с места тележка на установленной вдоль вагона дорожке сама приходит в движение относительно вагона в противоположную сторону. Тем не менее для наблюдателя, стоящего на платформе, тележка как была, так и останется на месте, просто дорожка под ней придет в движение вместе с вагоном. При торможении поезда стоявшая неподвижно на воздушной дорожке тележка устремится вперед. Однако для наблюдателя на платформе при торможении поезда тележка продолжает двигаться прямолинейно и равномерно с прежней скоростью. И так далее.

Какой же вывод отсюда следует? Очевидно, что связанная с равномерно и прямолинейно движущимся поездом система отсчета столь же удобна, как и связанная с Землей. Как в той, так и в другой системе отсчета тело в отсутствие внешних взаимодействий либо покоится, либо движется с постоянной скоростью. При ускоренном движении системы отсчета тело уже не сохраняет состояния покоя или равномерного движения. Скорость тела изменяется даже тогда, когда на него не действуют другие тела, т. е. «беспричинно».

Инерциальные системы отсчета. Таким образом, в динамике пропадает равноправие, эквивалентность всех систем отсчета. В произвольной системе отсчета изменение скорости тела может происходить без взаимодействия с другими телами. Системы отсчета, в которых тело, не взаимодействующее с другими телами, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, называются *инерциальными*. В рассмотренных примерах система отсчета, связанная с Землей, и система отсчета, связанная с равномерно и прямолинейно движущимся поездом, могут приближенно считаться инерциальными, в отличие от системы отсчета, связанной с ускоренно движущимся поездом.

Итак, введение инерциальной системы отсчета основано на использовании представления о *свободном теле*. Но как можно убедиться в том, что тело действительно свободно, т. е. не взаимодействует ни с какими другими телами? Все известные в физике взаимодействия между макроскопическими телами, например такие, как силы тяготения или силы электромагнитного взаимодействия, убывают с увеличением расстояния. Поэтому можно считать, что тело, достаточно удаленное от других тел, практически не испытывает воздействия с их стороны, т. е. является свободным. Реально, как мы видели, условия свободного движения могут выполняться лишь приближенно, с большей или меньшей точностью. Отсюда ясно, что невозможно осуществить такой опыт, который можно было бы считать прямым строгим доказательством существования инерциальных систем отсчета.

Геоцентрическая и гелиоцентрическая системы отсчета. Какие же системы отсчета можно считать инерциальными? Во многих

практически важных случаях инерциальной можно считать систему отсчета, связанную с Землей, — так называемую *геоцентрическую* систему отсчета. Но строго инерциальной она не является, о чем свидетельствуют хорошо известные опыты с маятником Фуко и с отклонением свободно падающих тел от вертикали. С гораздо большей степенью точности можно считать инерциальной *гелиоцентрическую* систему отсчета, связанную с Солнцем и «неподвижными» звездами. Любая система отсчета, которая движется относительно инерциальной с постоянной по модулю и направлению скоростью, тоже является инерциальной. Система отсчета, движущаяся относительно гелиоцентрической с ускорением, в частности вращающаяся, уже не будет инерциальной. Неинерциальность геоцентрической системы отсчета связана главным образом с суточным вращением Земли вокруг своей оси.

Первый закон Ньютона. Сформулированные выше положения и составляют содержание первого закона Ньютона в его современном понимании:

Существуют такие системы отсчета, в которых тело, не взаимодействующее с другими телами, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Такие системы отсчета называются инерциальными.

Утверждение о существовании инерциальных систем отсчета, составляющее содержание первого закона Ньютона, представляет собой экстраполяцию результатов реальных опытов на идеализированный случай полного отсутствия взаимодействия рассматриваемого тела с другими телами. Отметим, что первый закон Ньютона, постулируя существование инерциальных систем отсчета, тем не менее ничего не говорит о физических причинах, выделяющих инерциальные системы среди всех других систем отсчета.

Свободное тело. При обсуждении инерциальных систем отсчета и первого закона Ньютона было использовано представление о свободном теле. Строго говоря, при этом пренебрегалось размерами тела и фактически имелась в виду свободная материальная точка. Поэтому, применительно к реальным телам, все сказанное выше справедливо для таких движений, характер которых не зависит от размеров и формы тел. Другими словами, мы ограничиваемся только случаями, когда движение тела можно рассматривать как поступательное. Здесь можно не различать скоростей различных точек протяженного тела и говорить о скорости тела как целого. То же самое, справедливо и для ускорений различных точек протяженного тела.

Свободное протяженное тело в инерциальной системе отсчета может находиться в состоянии равномерного вращения по инерции. Например, могут вращаться вокруг своей оси звезды, удаленные от других небесных тел. Вращается и наше Солнце. При та-

ком вращении не лежащие на оси точки тела движутся с ускорением. Это ускорение обусловлено взаимодействием между различными частями протяженного тела, т. е. внутренними силами. Однако в целом такое протяженное свободное тело в инерциальной системе отсчета может только покоиться или двигаться прямолинейно и равномерно.

- В каком смысле состояние покоя и состояние равномерного прямолинейного движения тела эквивалентны?
- Какое движение называют движением по инерции? Можно ли практически осуществить такое движение?
- Каким образом можно убедиться в том, что данное тело не взаимодействует с другими телами?
- Что такое инерциальная система отсчета? Приведите примеры инерциальных систем отсчета.
- Чем объясняется ускорение разных точек протяженного тела, совершающего вращение по инерции?

△ **Инерциальные системы и опыт**. Введение понятия об инерциальных системах отсчета наталкивается на определенные логические трудности. Суть их можно уяснить из следующих рассуждений.

Что такое инерциальная система отсчета? Это система, относительно которой исследуемое тело движется равномерно и прямолинейно либо покоится, если оно не взаимодействует с другими телами. Но что значит — тело не взаимодействует ни с какими другими телами? Это просто означает, что тело движется прямолинейно и равномерно в инерциальной системе отсчета. Налицо порочный круг. Чтобы вырваться из него, нужно иметь независимую возможность убедиться в отсутствии взаимодействия.

Как уже упоминалось, все известные взаимодействия макроскопических тел убывают с увеличением расстояния между ними. Но в действительности нельзя быть уверенными в отсутствии взаимодействия только потому, что никакие другие тела не соприкасаются или не находятся очень близко к данному телу. Гравитационные или электромагнитные силы могут играть важную роль даже тогда, когда близко от данного тела нет других тел, так как эти силы недостаточно быстро убывают с расстоянием. Поэтому установление факта отсутствия взаимодействия на основе пространственного удаления тел имеет приближенный характер. И хотя на практике всегда можно установить таким способом существование свободных тел и инерциальных систем отсчета с любой требуемой точностью, в принципиальном отношении вопрос остается открытым. В этом смысле не существует «решающего» опыта, который можно было бы рассматривать в

качестве экспериментального доказательства справедливости первого закона Ньютона.

- Чтобы на опыте убедиться в том, что выбранная система отсчета инерциальна, нужно иметь свободное тело. Каким образом можно установить, что некоторое тело является свободным, т. е. не взаимодействует с другими телами? ▲

§ 16. Сила — мера взаимодействия

В инерциальной системе отсчета изменение скорости тела может быть обусловлено только его взаимодействием с другими телами. Для описания взаимодействия между телами вводится физическая величина — *сила*, дающая количественную меру этого взаимодействия.

Виды сил. Физическая природа взаимодействия может быть различной: существуют гравитационные, электрические, магнитные и другие взаимодействия. В механике физическая природа сил, вызывающих ускорение тела, совершенно несущественна: вопрос о происхождении взаимодействий в механике не ставится и не выясняется. Но для всех видов взаимодействий количественная мера может быть выбрана единым образом — измерять силы различной природы можно в одних и тех же единицах с помощью одних и тех же эталонов. Благодаря такой универсальности механика успешно описывает движения под действием сил любой природы.

Таким образом, определение силы в механике должно отвечать только на вопрос, как *измерить* силу и каковы ее *свойства*.

Измерение сил. Существуют различные способы измерения сил. Один из наиболее распространенных способов основан на свойстве сил вызывать *упругую деформацию* твердых тел.

Деформация твердого тела, например пружины, называется упругой, если тело принимает первоначальные форму и размеры после снятия усилия, вызывающего деформацию. Простейший прибор для измерения сил — это пружинный *динамометр*. Некоторые модификации этого прибора, например *крутильные весы*, обладают очень высокой чувствительностью (см., например, рис. 93). Такие весы представляют собой один из самых совершенных физических приборов. С помощью крутильных весов равенство инертной и гравитационной масс, о которых будет идти речь ниже, было установлено с относительной погрешностью, равной 10^{-12}. Такая точность эквивалентна возможности заметить изменение массы корабля водоизмещением в 1000 тонн при добавлении к нему 1 миллиграмма.

Для измерения сил на основе явления упругой деформации можно поступить следующим образом. Выберем и качестве эталона не-

которую пружину и по определению будем считать, что при растяжении на некоторую заданную длину пружина действует на прикрепленное к ее концу тело с силой $\mathbf{F}_0$, направленной вдоль оси пружины. Будем также считать, что две любые силы равны и противоположно направлены, если при одновременном действии только этих двух сил тело в инерциальной системе отсчета остается в покое или движется равномерно и прямолинейно. В соответствии с этим определением эталон силы можно воспроизвести в любом числе экземпляров.

Градуировка динамометра. Имея в распоряжении эталонную пружину, можно установить, имеет ли измеряемая сила значение F_0, но еще нельзя измерить любую силу. Для того чтобы получить способ измерения любых сил, попробуем сначала добиться того,

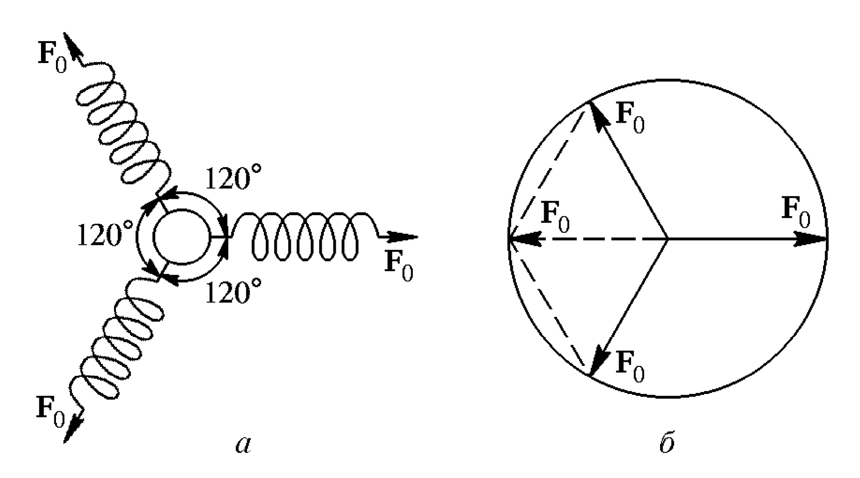


Рис. 62. Равновесие при действии трех одинаковых сил

чтобы тело в инерциальной системе отсчета оставалось в покое при одновременном действии на него трех эталонных сил F_0. Опыт показывает, что это возможно только в том случае, когда пружины расположены симметрично: их оси лежат в одной плоскости, образуя углы 120° друг с другом (рис. 62*а*). Отсюда можно сделать вывод, что действие двух сил F_0 под углом 120° друг к другу эквивалентно действию одной силы F_0, направленной по диагонали параллелограмма (ромба), построенного на этих силах (рис. 62*б*). В этом параллелограмме длина меньшей диагонали равна длине стороны.

Обобщим этот результат и будем считать, что действие на тело двух эталонных сил F_0, расположенных под любым углом друг к другу, эквивалентно действию одной силы, модуль и направление которой задаются диагональю параллелограмма, построенного на действующих силах как на сторонах. Другими словами, мы предполагаем, что две эталонные силы F_0 складываются, как векторы. Эта гипотеза дает возможность проградуировать прибор для измерения

сил — динамометр (рис. 63). Силе **F**, уравновешивающей совместное действие двух эталонных сил F_0, направленных под углом α друг к другу, мы приписываем модуль $2F_0 \cos(\alpha/2)$ и направление, указанное на рисунке.

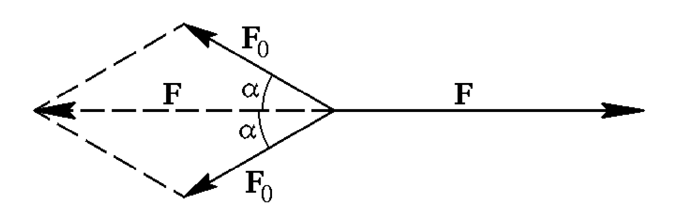


Рис. 63. Сложение сил и градуировка динамометра

Сила — вектор. Имея в распоряжении проградуированный динамометр, остается только убедиться на опыте, что все силы, независимо от их физической природы, складываются, как векторы. Действительно, силы упругости, на основе которых создан прибор для измерения сил — динамометр, складываются, как векторы, по принятому определению. Для всех остальных сил такое свойство должно проверяться на опыте.

Пусть, например, на стальной шарик (рис. 64) действуют две силы: сила упругости $\mathbf{F}_у$ со стороны динамометра D_1 и магнитная

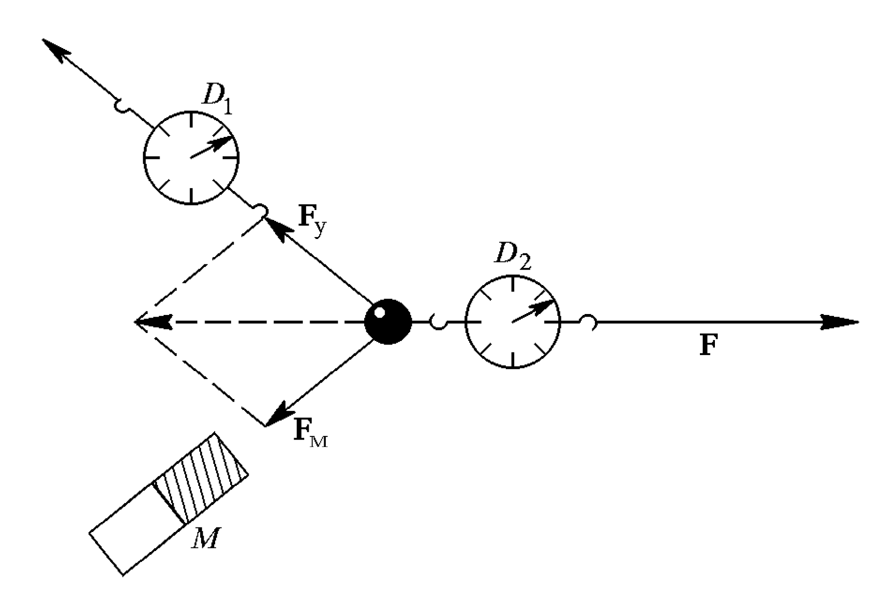


Рис. 64. Сложение сил разной физической природы

сила $\mathbf{F}_м$ со стороны постоянного магнита M. Силу $\mathbf{F}_м$, если бы она действовала отдельно, можно измерить с помощью динамометра. Поэтому можно считать, что в рассматриваемом опыте ее значение известно. При одновременном действии сил $\mathbf{F}_у$ и $\mathbf{F}_м$ опыт покажет, что шарик будет оставаться в покое, если на него подействовать еще и третьей силой **F** со стороны другого динамометра D_2, которая удовлетворяет равенству

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{F}_у + \mathbf{F}_м).$$

На основании описанных свойств можно заменять несколько сил их *равнодействующей*, равной их векторной сумме, и наоборот,

всякую силу можно раскладывать на составляющие, векторная сумма которых равна данной силе.

Введенный способ измерения сил дает возможность изучать на опыте свойства сил разной физической природы. При этом оказывается, что некоторые виды сил зависят от *взаимного расположения* взаимодействующих тел. К таким силам относятся, например, гравитационные силы, силы взаимодействия неподвижных электрических зарядов, силы взаимодействия постоянных магнитов и т. д. Другие виды сил зависят от *относительной скорости* взаимодействующих тел. К таким силам относятся, например, сила трения, силы, действующие со стороны постоянного магнита на движущиеся электрические заряды, и т. д. Однако независимо от этих специфических для каждого вида сил свойств все силы обладают одним универсальным свойством — сообщать ускорение телам, на которые они действуют.

- В каком случае действующие на тело силы считаются одинаковыми?
- Какими достоинствами обладает метод измерения сил, основанный на упругой деформации твердых тел?
- Как можно на опыте установить, что действующая на стальной шарик со стороны постоянного магнита сила является вектором?
- Что значит разложить силу на составляющие? Когда это можно делать? Как могут быть направлены эти составляющие?

§ 17. Связь между силой и ускорением. Второй закон Ньютона

В соответствии с первым законом Ньютона в инерциальной системе отсчета свободное тело не имеет ускорения. Ускорение тела обусловлено его *взаимодействием* с другими телами, т. е. действующими на тело силами.

Поскольку мы умеем измерять ускорение и силу независимо друг от друга, мы можем на опыте установить связь между ними. Эта связь оказывается очень простой: во всех случаях ускорение тела *пропорционально* вызывающей его силе:

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{F}. \qquad (1)$$

Пропорциональность между ускорением и силой справедлива для сил любой физической природы, причем коэффициент пропорциональности — постоянная для данного тела величина. Направление вектора ускорения совпадает с направлением силы.

Отклонения от этой фундаментальной закономерности обнаруживаются только для очень быстрых движений, происходящих со скоростями, сравнимыми со скоростью света $c = 300\,000$ км/с. В мире окружающих нас макроскопических тел такие скорости не встре-

чаются. Самое быстрое из известных здесь движений — движение Земли по орбите вокруг Солнца — происходит со скоростью «всего»

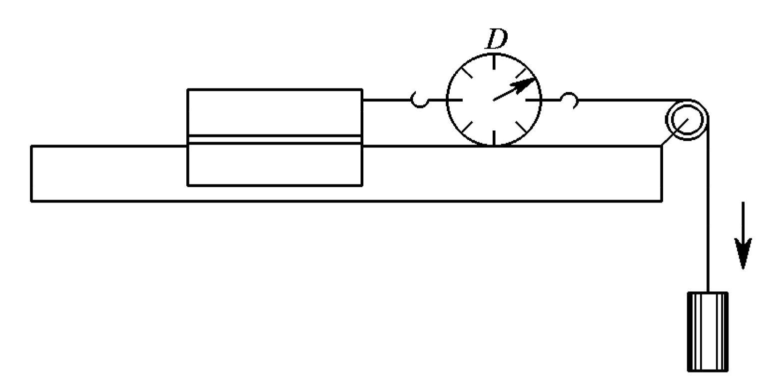


Рис. 65. Опыт на воздушной дорожке, в котором проверяется пропорциональность ускорения и силы

30 км/с. С релятивистскими скоростями движутся только микрообъекты: частицы в космических лучах, электроны и протоны в ускорителях заряженных частиц и т. д.

Проиллюстрировать закономерность (1) можно в наглядных демонстрационных опытах. Удобно использовать ту же воздушную дорожку, что и при демонстрации движения по инерции. Обеспечить постоянство силы, действующей на тележку в направлении ее движения, можно следующим образом. Прикрепим к ней динамометр D (рис. 65), к другому концу пружины которого привязана нить с грузом, переброшенная через неподвижный блок в конце дорожки. По показанию динамометра можно судить о силе, действующей на тележку со стороны нити. Подвешивая к концу нити разные грузы, можно придавать этой силе разные значения. Ускорение, приобретаемое тележкой под действием этой силы, можно рассчитать с помощью формул кинематики, измеряя, например, пути, проходимые тележкой за определенные промежутки времени. С этой целью можно использовать, в частности, стробоскопическую фотографию, когда объект освещается короткими вспышками света через равные промежутки времени (рис. 66).

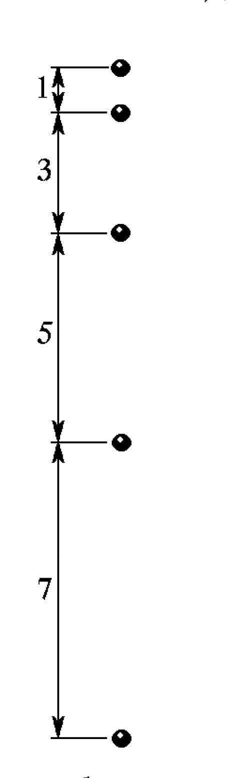


Рис. 66. Стробоскопическая фотография равноускоренного движения

Опыт показывает, что под действием постоянной силы (о чем можно судить по неизменному показанию динамометра во время движения тележки) движение действительно происходит с постоянным ускорением. Если повторить опыт, изменив значение действующей силы, то во столько же раз изменится и ускорение тележки.

Инертность. Коэффициент пропорциональности между ускорением и силой, неизменный для данного тела, оказывается разным для разных тел. Сцепив вместе две одинаковые тележки, мы увидим, что некоторая сила F сообщает им ускорение, вдвое меньшее того, которое она сообщала одной тележке. Таким образом, коэффициент пропорциональности между ускорением и силой связан с определенным физическим свойством тела. Это свойство называется *инертностью*. Чем больше инертность тела, тем меньшее ускорение сообщает ему действующая сила.

Физическая величина, количественно характеризующая свойство инертности тела, — это *масса*, или *инертная масса*. Используя понятие массы m, связь между ускорением и силой можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \tag{2}$$

Масса как мера инертности. Входящая в формулу (2) масса m — это мера инертности тела. Она не зависит не только от действующей на тело силы F, но и от других физических условий, в которых находится это тело, — от температуры окружающей среды, наличия электрического или гравитационного поля и т. д. Убедиться в этом можно, если проделать с данным телом аналогичные опыты, используя силу другой физической природы, при разных температурах и влажностях окружающего воздуха, на поверхности земли или в высоких горах и т. п.

Свойства массы. Из опыта известны следующие свойства массы: это *аддитивная скалярная* величина, не зависящая от положения тела. Масса тела не зависит и от его скорости при условии, что эта скорость много меньше скорости света. *Аддитивность* означает, что масса составного тела равна сумме масс его частей. Свойство аддитивности массы очень точно выполняется для макроскопических тел и нарушается лишь тогда, когда энергия взаимодействия составных частей тела велика, например при соединении протонов и нейтронов в атомное ядро. Тот факт, что масса — *скаляр*, означает, что инертные свойства тела одинаковы во всех направлениях.

Равенство (2) можно трактовать следующим образом. Если однажды произвести с данным телом одновременное измерение действующей на него силы и приобретаемого им ускорения, то тем самым будет найдена его масса m и в дальнейшем можно рассчитывать ускорение $\mathbf{a}$ этого тела по известной силе $\mathbf{F}$, или наоборот, рассчитывать действующую силу $\mathbf{F}$ по известному ускорению $\mathbf{a}$. Этот так называемый динамический способ определения массы в дальнейшем мы сравним с распространенным способом измерения массы взвешиванием.

Опыт показывает, что при одновременном действии на тело нескольких сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ ускорение $\mathbf{a}$ пропорционально вектор-

ной сумме этих сил. Поэтому равенство (2) обобщается следующим образом:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n). \quad (3)$$

Второй закон Ньютона. Равенство (3) выражает содержание второго закона Ньютона:

В инерциальной системе отсчета ускорение тела пропорционально векторной сумме всех действующих на него сил и обратно пропорционально массе тела.

Выражаемая вторым законом Ньютона связь между ускорением и силой имеет универсальный характер. Она не зависит от конкретного выбора инерциальной системы отсчета. Закон справедлив при любом направлении действующей силы. Когда эта сила направлена вдоль скорости тела, она изменяет модуль скорости, т. е. сообщаемое такой силой ускорение будет тангенциальным. Именно так и было в описанных опытах с воздушной дорожкой. Когда сила направлена перпендикулярно скорости, она изменяет направление скорости, т. е. сообщаемое телу ускорение будет нормальным (центростремительным). Например, при почти круговом движении Земли вокруг Солнца действующая перпендикулярно орбитальной скорости сила притяжения к Солнцу сообщает Земле центростремительное ускорение.

Когда все действующие на тело силы уравновешены, т. е. их векторная сумма равна нулю, ускорение тела относительно инерциальной системы отсчета отсутствует: $\mathbf{a} = 0$. Тело либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. Его движение в этом случае неотличимо от движения по инерции, о котором шла речь при обсуждении первого закона Ньютона. Однако если там движение в отсутствие сил использовалось для введения инерциальных систем отсчета, то здесь равенство нулю ускорения при компенсации действующих сил является следствием второго закона Ньютона.

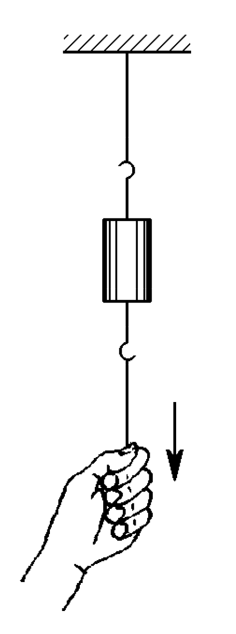


Рис. 67. Опыт, иллюстрирующий инертность

Сила и движение. Суть второго закона Ньютона, выражаемого формулой (3), весьма проста. Однако зачастую результаты его действия оказываются неожиданными из-за своеобразных проявлений инертности тел. Дело в том, что в самом законе фигурирует ускорение, а движение наглядно воспринимается через скорость. Рассмотрим следующий опыт.

Подвесим на тонкой нити массивное тело, а снизу привяжем к нему еще одну такую же нить (рис. 67). Если медленно потянуть за нее вниз, постепенно увеличивая приложен-

ную силу, то в некоторый момент оборвется верхняя нить. Это легко понять, так как сила натяжения верхней нити обусловлена как приложенной внешней силой, так и весом подвешенного тела. Однако если нижнюю нить дернуть вниз резким движением, то оборвется нижняя нить. Объяснение этого заключается в следующем. Обрыв нити происходит, когда ее удлинение достигает определенной величины. Чтобы растянулась верхняя нить, груз должен переместиться вниз на такое же расстояние. Но это не может произойти мгновенно: благодаря инертности массивного тела для изменения его скорости требуется некоторое время, которого как раз и не хватает при резком рывке за нижнюю нить.

- В чем заключается свойство инертности? Что такое инертная масса тела?
- Какие опыты свидетельствуют об аддитивности массы?
- Какие утверждения содержатся во втором законе Ньютона?
- Как должна быть направлена действующая на тело сила, чтобы его скорость изменялась только по направлению? Приведите примеры таких движений.
- Может ли равняться нулю ускорение тела в инерциальной системе отсчета, если на него действуют силы?

§ 18. Взаимодействие тел. Третий закон Ньютона

Действующие на тело силы всегда обусловлены его взаимодействием с другими телами. Третий закон Ньютона количественно характеризует это взаимодействие:

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль соединяющей тела прямой:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (1)$$

Этот закон справедлив независимо от физической природы взаимодействия тел. Всемирное тяготение, взаимодействие неподвижных электрических зарядов — все это примеры взаимодействий, для которых справедлив третий закон Ньютона. Однако в каждом конкретном случае в равенстве (1) обе фигурирующие силы имеют одну и ту же физическую природу, хотя и приложены к разным телам.

Третий закон Ньютона является прямым обобщением экспериментальных фактов. В его справедливости можно убедиться на ряде простых опытов.

Для неподвижных взаимодействующих тел возможно непосредственное измерение сил взаимодействия с помощью динамометров. Рассмотрим, например, притяжение стального шарика постоянным магнитом. Для исключения трения поместим их на подставки, кото-

рые могут перемещаться по воздушной дорожке (рис. 68). Соединим подставки со стенками через пружинные динамометры D_1 и D_2. В равновесии показания динамометров окажутся одинаковыми. Легко

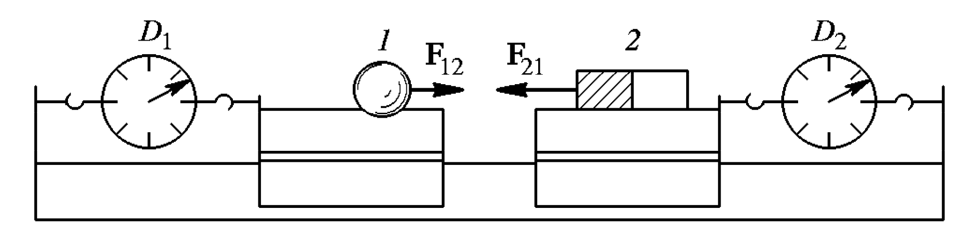


Рис. 68. Показания динамометров D_1 и D_2 одинаковы

сообразить, что D_1 измеряет силу F_{12}, действующую на шарик (тело *1*) со стороны магнита (тело *2*), а D_2 — силу F_{21}, действующую на магнит со стороны шарика. Силы взаимодействия магнита и шарика оказались равными и противоположно направленными.

В тех случаях, когда взаимодействующие тела движутся и сообщают друг другу ускорения, определить силы, с которыми они действуют друг на друга, можно с помощью второго закона Ньютона. Рассмотрим, например, взаимодействие двух движущихся по воздушной дорожке тележек, массы которых m_1 и m_2 известны (измерены заранее). Взаимодействие тележек может быть осуществлено либо соединяющей их легкой упругой пружиной, либо закрепленными на них магнитом и стальным шариком, либо двумя магнитами, либо еще каким-нибудь другим способом. Независимо от способа взаимодействия, т. е. физической природы действующих сил, мы обнаружим, что тележки сообщают друг другу противоположные по направлению ускорения $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, причем модули ускорений тележек в любой, но один и тот же момент времени обратно пропорциональны массам тележек:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (2)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона это означает, что силы взаимодействия тележек равны по модулю и противоположно направлены. Действительно, так как $\mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2$, то из (2) с учетом того, что направления ускорений $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ противоположны, следует $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Действие и противодействие. Итак, опыт показывает, что для любых двух тел при любом характере их взаимодействия силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. В формулировке самого Ньютона третий закон звучит следующим образом: «Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодейст-

вия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны». Не следует, однако, думать, что «противодействие» чем-либо принципиально отличается от «действия». Такая терминология неудачна, так как в ней подразумевается активный характер одной из сил и пассивный — второй, хотя на самом деле силы взаимодействия всегда имеют одинаковую физическую природу и выступают равноправными партнерами. Если «действующая» сила обусловлена всемирным тяготением, то и «противодействующая» сила обусловлена этой же причиной. Если действующая сила вызвана упругой деформацией одного из соприкасающихся тел, то противодействующая — деформацией второго, и т. д.

Взвешивание Луны. Равенство (2) можно использовать для сравнения масс небесных тел, опираясь на то, что третий закон Ньютона справедлив для сил их гравитационного притяжения. Из астрономических наблюдений известно, что Луна обращается по окружности

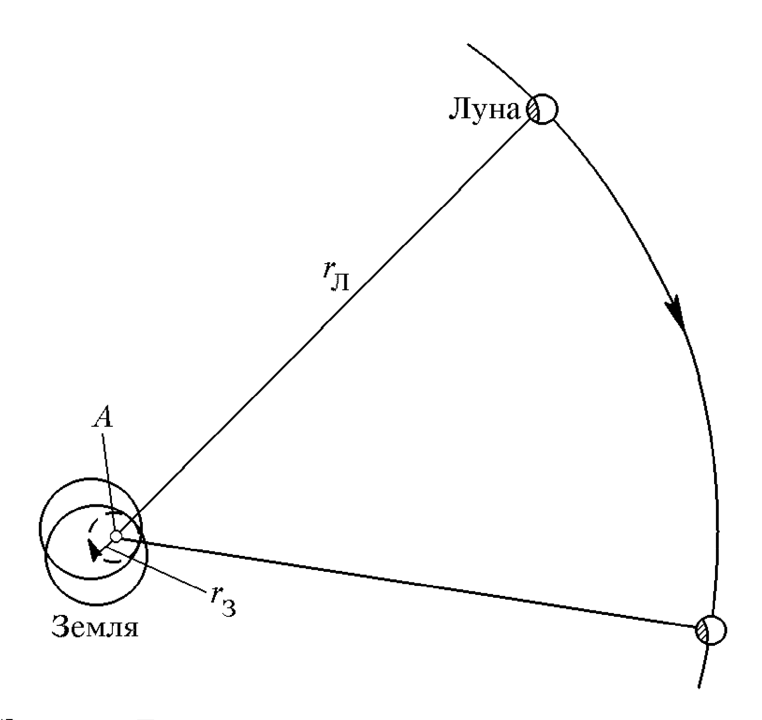


Рис. 69. Ценры Земли и Луны движутся по окружностям радиусов $r_З$ и $r_Л$ с общим центром в точке A

радиуса $r_Л = 380\ 000$ км, но не вокруг центра Земли, а вокруг некоторой точки A (центра масс Земли и Луны), отстоящей от центра Земли на расстояние $r_З = 4700$ км (рис. 69). Эта точка лежит внутри земного шара, так как его средний радиус $R = 6400$ км. Вокруг этой же точки движется по окружности и центр Земли. При этом Луна и Земля все время находятся на противоположных концах одной прямой, проходящей через точку A, совершая полный оборот вокруг нее за одно и то же время. Вспоминая выражение $a_n = \omega^2 r$ для центростремительного ускорения точки, движущейся по окружности радиуса r с угловой скоростью ω, видим, что отношение ус-

корений Земли и Луны равно отношению радиусов $r_З$ и $r_Л$ окружностей, по которым обращаются их центры:

$$\frac{a_З}{a_Л} = \frac{r_З}{r_Л}.$$

Но вследствие третьего закона Ньютона отношение модулей ускорений взаимодействующих тел равно обратному отношению их масс (формула (2)), поэтому

$$\frac{m_Л}{m_З} = \frac{r_З}{r_Л} = \frac{4700 \text{ км}}{380\,000 \text{ км}} \approx \frac{1}{81}.$$

Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли.

Строго говоря, третий закон Ньютона применительно к взаимодействию движущихся удаленных тел имеет приближенный характер, так как он предполагает мгновенное распространение взаимодействий, утверждая о равенстве сил в один и тот же момент времени. Поэтому для движущихся удаленных тел, взаимодействующих посредством создаваемых ими полей, этот закон выполняется лишь приближенно, в то время как при «контактном» взаимодействии, т. е. при непосредственном соприкосновении тел, он является точным.

Законы Ньютона в механике играют такую же роль, как и аксиомы при построении математической теории, например евклидовой геометрии. Вся динамика может быть получена дедуктивным путем как следствие этих законов.

- Описывая опыт, в котором сравнивались силы взаимодействия неподвижного магнита и стального шарика (см. рис. 68), мы считали, что эти силы измерялись с помощью динамометров. Объясните, почему в этом случае силы взаимодействия магнита и шарика не сообщают ускорения подставкам, на которых они закреплены. Как неподвижность подставок согласуется со вторым законом Ньютона?
- Как можно заранее измерить массы тележек с магнитом и шариком, которые используются в описанном выше опыте по измерению сил взаимодействия между движущимися телами?
- Допустим, что взаимодействие тележек осуществляется посредством зажатой между ними пружинки, которая при освобождении расталкивает покоившиеся до этого тележки. Докажите, что отношение ускорений a_1/a_2, сообщенных тележкам пружинкой, может быть измерено по отношению скоростей тележек v_1/v_2.
- Разъясните известный парадокс «лошади и телеги», заключающийся в следующем. Лошадь тянет телегу с некоторой силой. Однако в соответствии с третьим законом Ньютона телега действует на лошадь с равной, но противоположно направленной силой. Казалось бы, телега и лошадь должны при этом прийти в движение в противоположные стороны. Почему же лошади удается везти телегу за собой?

△ **Логическая структура динамики.** При логическом построении математической теории существует некоторая свобода в выборе основных аксиом. В динамике также можно несколько по-разному сформулировать основные законы. В принятом выше изложении основ механики Ньютона второй закон содержит экспериментально проверяемое *утверждение* о пропорциональности между ускорением и действующей силой и *определение* инертной массы.

Можно сформулировать законы динамики таким образом, чтобы определить массу независимо от второго закона. В этом случае второй закон будет содержать два утверждения: о пропорциональности ускорения силе и обратной пропорциональности массе. Каждое из этих утверждений можно независимо подвергнуть экспериментальной проверке.

Не опирающееся на второй закон Ньютона определение массы может быть основано на использовании третьего закона. При таком подходе третий закон динамики формулируется как утверждение, что при любом взаимодействии двух тел отношение модулей их ускорений есть постоянная для этих тел величина, которая по определению принимается равной обратному отношению их масс:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (3)$$

Это соотношение по виду совпадает с формулой (2), однако теперь в него вкладывается другой смысл. Если раньше оно выражало проверяемое на опыте соотношение между ускорениями двух тел, массы которых определялись порознь в опытах, основанных на втором законе Ньютона, то теперь это соотношение по определению, без помощи второго закона Ньютона, позволяет выразить массы всех тел через массу некоторого тела, принятого за эталон массы. В таком случае, имея независимые способы измерения силы и массы, можно экспериментально устанавливать зависимость ускорения тела от каждой из этих величин. При этом, разумеется, равенство (1) уже не является самостоятельным физическим законом, а представляет собой следствие законов динамики, выражаемых соотношением $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ и формулой (3).

Еще один возможный способ логического построения динамики не требует предварительного введения способа измерения силы, не опирающегося на второй закон Ньютона. Вместо использования эталонной пружины можно просто принять *по определению*, что действующая на тело сила, сообщающая ему ускорение $\mathbf{a}$, равна произведению массы тела m на это ускорение:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

При этом предполагается, что масса тела m измеряется сравнением с массой эталона с помощью соотношения (3). В рамках такого подхода содержание второго закона Ньютона не сводится только к определению силы. Измерив данную силу по сообщаемому ею ускорению в каком-то одном движении, на опыте можно убедиться, что ускорение будет пропорционально силе и обратно пропорционально массе для всех других движений.

Законы динамики и опыт. Подводя итоги, мы видим, что возможны разные способы формулировки основ динамики, при которых во второй и третий законы Ньютона вкладывается различное содержание. Однако в каждом из этих подходов законы Ньютона в своей совокупности образуют эквивалентные, логически непротиворечивые схемы, позволяющие давать адекватное описание любых механических движений.

Законы Ньютона содержат настолько сильные и общие утверждения, что их экспериментальная проверка не сводится к каким-то «решающим» опытам, подтверждающим отдельные законы. Убеждение в справедливости законов Ньютона основывается на совпадении с опытом всех теоретических предсказаний относительно конкретных механических движений, сделанных с помощью этих законов.

Подлинным триумфом классической механики стало открытие в середине XIX века неизвестной до этого планеты Нептун, сделанное «на кончике пера». Анализируя наблюдавшиеся аномалии в движении наиболее удаленной из известных в то время планеты Уран, Леверрье во Франции и Адамс в Англии независимо друг от друга и практически одновременно пришли к выводу о том, что причиной таких аномалий может быть существование еще одной планеты, обладающей определенной массой и орбитой, внешней по отношению к орбите Урана. Всего лишь после получасового поиска берлинский астроном Галле обнаружил эту планету в предсказанном месте. В настоящее время предсказание положения планет на основе классической механики с помощью расчетов на ЭВМ согласуется с результатами наблюдений в пределах нескольких угловых секунд даже в тех случаях, когда производится экстраполяция на многие годы вперед.

- Сформулируйте возможные логические схемы построения законов динамики.
- Что можно сказать об экспериментальной проверке законов классической динамики? Почему невозможны какие-либо «решающие» опыты по проверке этих законов?
- Что вам известно о границах применимости законов классической динамики? ▲

§ 19. Применение законов динамики

Законы динамики дают возможность находить действующую на тело силу, когда известно, как оно движется под действием этой силы. В самом деле, когда известна зависимость $\mathbf{r}(t)$, можно найти ускорение $\mathbf{a}$ и с помощью второго закона Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ рассчитать действующую силу $\mathbf{F}$.

Справедливо и обратное: когда известна действующая на тело сила $\mathbf{F}$, можно найти сообщаемое этой силой ускорение $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ и с помощью формул кинематики рассчитать его движение. Для этого, разумеется, нужно знать положение и скорость тела в начальный момент времени.

Движение со связями. В динамике встречаются и такие задачи, где задана только часть сил, действующих на рассматриваемое тело. Такая ситуация возникает, когда движение происходит по заданной траектории при наложенных *связях*. Примерами механических систем, совершающих такие движения, могут служить грузик на нерастяжимой нити в поле тяжести, грузы, соединенные перекинутой через блок нитью, брусок на наклонной плоскости и т. п.

Наличие связи приводит к тому, что движение грузика на нити ограничено сферической поверхностью с центром в точке подвеса; движение соединенных нитью грузов происходит так, что расстояние между ними, измеренное вдоль натянутой нити, все время остается неизменным, движение бруска на наклонной плоскости — вдоль ее поверхности и т. д. При изучении таких систем возникает задача не только расчета их движения, но и определения *сил реакции связей*. В уравнениях, выражающих второй закон Ньютона, число неизвестных возрастает, так как помимо ускорений подлежат определению и некоторые из действующих сил. Но и в этом случае удается найти все неизвестные, так как к уравнениям второго закона динамики добавляются условия, выражающие влияние наложенных связей.

Рассмотрим применение законов динамики на примере конкретных задач. Для всех разбираемых примеров систему отсчета, связанную с Землей, можно с достаточной степенью точности считать неподвижной.

Задачи

1. *В свободном полете.* Брошенное под углом к горизонту тело массы $m = 3$ кг движется по параболической траектории с постоянным ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2, направленным вертикально вниз. Какая сила приводит к такому движению?

Решение. В соответствии со вторым законом Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. В данном случае $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Поэтому сообщающая такое движение сила $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Это сила *тяжести*, обусловленная гравитационным взаимодействием тела с Землей. На основании третьего закона Ньютона можно утверждать, что равная

по модулю и противоположно направленная сила реакции действует со стороны тела на земной шар. Но из-за огромной массы Земли эта сила, модуль которой равен $F = mg = 3$ кг$\cdot$9,8 м/с^2=29,4 Н, практически не сообщает Земле никакого ускорения.

Подчеркнем, что действующая на тело сила тяжести $m\mathbf{g}$ не зависит от того, по какой именно параболической траектории оно движется.

2. *Вес тела в лифте.* Ящик массой m стоит на полу лифта, который движется с ускорением $\mathbf{a}$, направленным вертикально вверх. С какой силой давит ящик на пол лифта?

Решение. На ящик действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная вертикально вниз, и сила $\mathbf{N}$ реакции пола, направленная вертикально вверх. В неподвижном или равномерно движущемся лифте, когда $\mathbf{a} = 0$, векторная сумма этих сил равна нулю: $m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0$, откуда $\mathbf{N} = -m\mathbf{g}$. По своей физической природе сила $\mathbf{N}$ реакции пола — это сила упругости, связанная с его деформацией.

Сила $\mathbf{P}$, с которой ящик давит на пол, называется его *весом*. На основании третьего закона Ньютона она равна по модулю и противоположно направлена силе $\mathbf{N}$ реакции пола: $\mathbf{P} = -\mathbf{N}$. Отсюда получаем, что $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. В неподвижном или равномерно движущемся лифте вес тела $\mathbf{P}$ равен действующей на него силе тяжести $m\mathbf{g}$. Однако по своей физической природе эти силы различны, так как вес $\mathbf{P}$, как и $\mathbf{N}$, — это сила упругости, в то время как сила тяжести $m\mathbf{g}$ обусловлена гравитационным взаимодействием.

В случае, когда лифт и стоящий на его полу ящик движутся с ускорением $\mathbf{a}$, уравнение второго закона Ньютона записывается в виде

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}. \tag{1}$$

Отсюда для $\mathbf{N}$ получаем

$$\mathbf{N} = m(\mathbf{a} - \mathbf{g}). \tag{2}$$

Поскольку ускорение $\mathbf{a}$ направлено вверх, а $\mathbf{g}$ — вниз, проекция векторного уравнения (2) на ось, направленную вертикально вверх, дает

$$N = m(a + g). \tag{3}$$

Сила $\mathbf{P}$, с которой ящик давит на пол, т. е. вес ящика, по-прежнему связана с третьим законом Ньютона: $\mathbf{P} = -\mathbf{N}$, откуда для модуля P имеем

$$P = m(a + g). \tag{4}$$

Мы видим, что в лифте, ускорение которого направлено вертикально вверх, вес тела больше своего обычного значения, равного mg. Это и есть так называемая *перегрузка*, которую испытывают космонавты при старте космического корабля, когда ускорение a в 6—10 раз превосходит значение $g \approx 10$ м/с^2.

Обратим внимание, что полученный результат (4) не зависит от направления движения, т. е. направления скорости. Перегрузка наблюдается как при разгоне лифта или космического корабля вверх, так и при торможении опускающегося вниз лифта или космического корабля при срабатывании двигателей мягкой посадки.

3. *Невесомость.* Ящик массы m стоит на полу лифта, который движется с ускорением $\mathbf{a}$, направленным вертикально вниз, причем $a < g$. С какой силой давит ящик на пол лифта?

Решение. Уравнение (1) второго закона Ньютона не зависит от направления вектора ускорения **a**. Поэтому остается в силе и выражение (2) для силы **N** реакции пола. В проекции на ось, направленную вертикально вверх, оно теперь имеет вид

$$N = m(g - a), \tag{5}$$

что уже не совпадает с (3), поскольку вектор **a** направлен в другую сторону. Соответствующим образом изменяется и выражение (4) для веса тела:

$$P = m(g - a). \tag{6}$$

В лифте, ускорение которого направлено вниз, вес тела меньше его обычного значения. И опять этот результат не зависит от направления скорости: вес уменьшается как при разгоне опускающегося вниз лифта, так и при замедлении и остановке поднимающегося вверх лифта.

Если в формуле (6) положить $a = g$, то вес обращается в нуль: в свободно падающем лифте падающий вместе с ним ящик уже не давит на пол. Это и есть так называемое *состояние невесомости*. В состоянии невесомости оказывается любое тело, движущееся с ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, независимо от направления его скорости. Это видно непосредственно из формулы (2). Например, в невесомости находится подпрыгнувший человек, начиная с момента отрыва от земли и до момента касания земной поверхности. В течение длительного времени состояние невесомости реализуется в кабине космического корабля, совершающего орбитальный полет с выключенными двигателями, так как корабль все время находится в свободном падении.

А что будет, если лифт опускается с ускорением $a > g$? Чтобы осуществить это, нужно тянуть его вниз дополнительно к действующей на него силе тяжести. Из формулы (5) в этом случае получается для силы реакции N отрицательное значение: чтобы ящик двигался вместе с лифтом с ускорением $a > g$, сила реакции должна быть направлена вниз. Такое возможно, только если ящик прикреплен к полу. В противном случае он будет падать с ускорением g, отставая от уходящего из-под него пола, и в конце концов окажется на потолке лифта. На потолок он будет давить с направленной вверх силой, выражение для которой дается той же формулой (2).

4. *Выпуклый мост.* Автомобиль массы m движется с постоянной скоростью v по выпуклому мосту, представляющему собой дугу окружности радиуса R (рис. 70). С какой силой автомобиль давит на мост в его верхней точке?

Решение. В верхней точке моста действующие на автомобиль сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила реакции моста **N** направлены в противоположные стороны. Так как автомобиль равномерно движется по дуге окружности, то его ускорение **a** направлено к центру O и равно по модулю v^2/R. В результате уравнение второго закона Ньютона

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$$

в верхней точке моста в проекции на направленную вниз ось принимает вид

$$m\,\frac{v^2}{R} = mg - N.$$

Отсюда находим силу реакции моста

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right),$$

которая вследствие третьего закона Ньютона равна по модулю силе давления автомобиля на мост. Видно, что эта сила меньше нормального веса mg неподвижного или движущегося по горизонтальной дороге автомобиля.

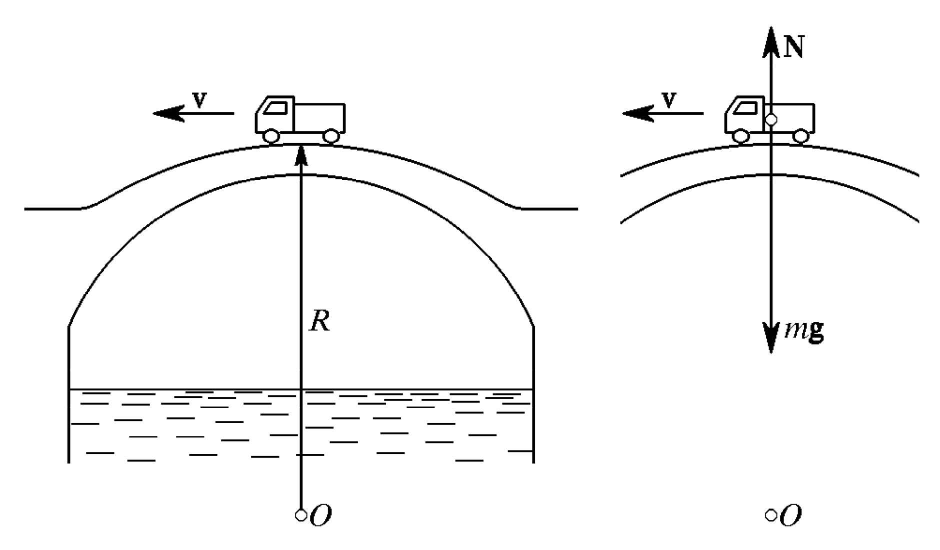


Рис. 70. К задаче 4

При достаточно большой скорости, когда $v^2 = gR$, сила давления на мост обращается в нуль: автомобиль, как и находящиеся в нем пассажиры, оказывается в состоянии невесомости. При $v^2 > gR$ автомобиль отрывается от поверхности горбатого моста и некоторое время находится в свободном полете. Аналогичную картину можно часто наблюдать в соревнованиях по мотокроссу.

5. *Машина Атвуда.* Через неподвижный блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы с массами m_1 и m_2 (рис. 71*а*). Такое устройство используют для изучения законов динамики на опыте. Найдите силу натяжения нити и ускорения грузов.

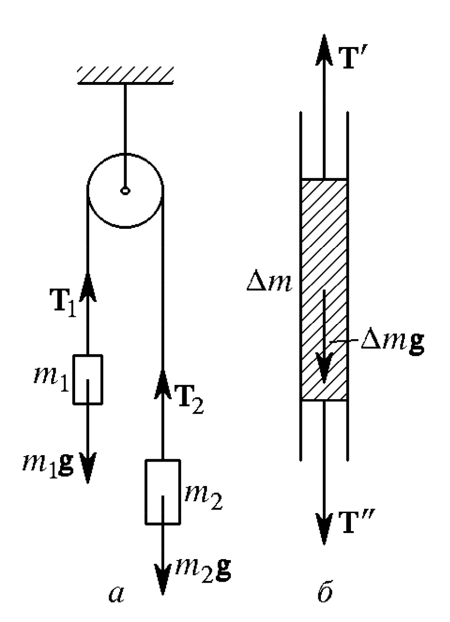


Рис. 71. К задаче 5

Р е ш е н и е. Рассмотрим силы, действующие на каждый из грузов. Очевидно, что кроме сил тяжести $m_1\mathbf{g}$ и $m_2\mathbf{g}$, направленных вертикально вниз, на грузы со стороны нити действуют силы натяжения $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, направленные вертикально вверх. В инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов записываются в виде

$$m_1\mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1, \quad m_2\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2. \qquad (7)$$

Эти уравнения справедливы без каких-либо упрощающих предположений о соотношениях между массами грузов, нити, блока, о наличии трения в блоке и т. д. Однако из них невозможно определить все неизвестные величины, так как число неизвестных больше числа уравнений.

Обычные идеализации, используемые при решении подобных задач, заключаются в пренебрежении массами нити и блока, трением в оси блока и

растяжимостью нити. На этих идеализациях основана простейшая физическая модель рассматриваемой системы.

К чему приводят эти идеализации? Из нерастяжимости нити, т. е. неизменности ее длины, следует очевидное соотношение между проекциями ускорений грузов на вертикальную ось:

$$a_1 = -a_2.$$

Одинаковый модуль этих ускорений обозначим через a.

Действующая на каждый из грузов со стороны нити сила натяжения вследствие третьего закона Ньютона равна по модулю и противоположна по направлению силе, с которой груз натягивает нить. Из предположения о нулевой массе нити следует, что натяжение ее левого и правого участков одинаковы во всех точках, хотя могут и различаться между собой. В этом можно убедиться, если мысленно выделить малый участок нити массы Δm (рис. 71*б*) и применить к нему второй закон Ньютона:

$$\Delta m\mathbf{a} = \mathbf{T}' + \mathbf{T}'' + \Delta m\mathbf{g}. \tag{8}$$

Если $\Delta m = 0$, то из (8) следует $\mathbf{T}' = -\mathbf{T}''$. Это означает, что модуль силы натяжения одинаков во всех точках нити слева и справа от блока.

Если теперь считать, что масса блока равна нулю и трение в его оси отсутствует, то силы натяжения нити будут одинаковы по обе стороны от блока. Предположение об отсутствии трения не требует особых комментариев. Если допустить, что при этом силы натяжения $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, действующие на блок слева и справа, не равны друг другу, то при нулевой массе блок должен был бы раскручиваться с бесконечно большим угловым ускорением. Обозначим равные друг другу модули сил $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ одной буквой T.

Таким образом, в рамках рассмотренной простейшей модели система уравнений (7) становится замкнутой и позволяет найти неизвестные величины a и T. Полагая для определенности $m_1 > m_2$, перепишем уравнения (7) в проекциях на направленную вниз ось:

$$m_1a = m_1g - T, \quad -m_2a = m_2g + T. \tag{9}$$

Исключая из этих уравнений a, находим

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\,g. \tag{10}$$

Исключая из уравнений (9) T, получаем

$$a = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,g. \tag{11}$$

Для предельного случая $m_1 = m = {}_2m$ формула (11) дает $a = 0$, т. е. грузы либо покоятся, либо движутся равномерно. При этом, как видно из (10), сила натяжения нити равна силе тяжести, действующей на каждый из грузов: $T = mg$.

Если $m_1 < m_2$, то (11) дает формально $a < 0$, что означает, что ускорение левого груза (массы m_1) в действительности направлено вверх.

Полученные результаты позволяют судить о направлениях только ускорений грузов, но не их скоростей.

6. *Система блоков.* Найдите силу натяжения нити и ускорения грузов в системе, показанной на рис. 72. Считать, что массы грузов m_1 и m_2 много больше масс блоков и нити и трение отсутствует.

Решение. Сформулированные в условии идеализации приводят к простейшей модели, в которой сила натяжения перекинутой через блоки нити одинакова по всей длине. Составим уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов. Силы, действующие на грузы, показаны на рисунке. Тогда

$$m_1\mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1, \quad m_2\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2. \qquad (12)$$

Связь между ускорениями грузов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ в этой системе не столь очевидна, как в предыдущей задаче. Поэтому, не предрешая заранее направления ускорений грузов, обозначим через a_{1x} и a_{2x} их проекции на ось x, направленную вертикально вниз. Спроецируем уравнения (12) на эту ось:

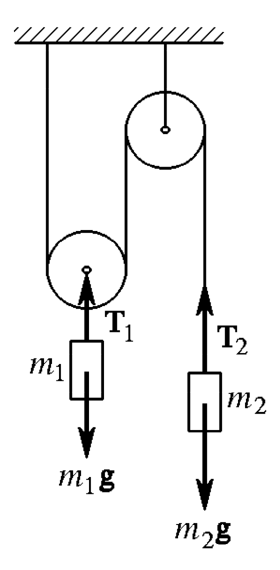


Рис. 72. К задаче 6

$$m_1a_{1x} = m_1g - T_1, \quad m_2a_{2x} = m_2g - T_2. \qquad (13)$$

Обозначим модуль силы натяжения перекинутой через блоки нити через T. Тогда вследствие третьего закона Ньютона на груз m_2 со стороны нити действует сила $T_2 = T$, а, так как масса левого блока равна нулю, $T_1 = 2T$. Теперь уравнения (13) перепишутся в виде

$$m_1a_{1x} = m_1g - 2T, \quad m_2a_{2x} = m_2g - T. \qquad (14)$$

Система двух уравнений (14) содержит три неизвестных: проекции a_{1x} и a_{2x} ускорений грузов на выбранную ось и силу натяжения нити T. Чтобы установить связь между проекциями ускорений, накладываемую условием нерастяжимости нити, рассмотрим мысленно возможные перемещения грузов. Пусть, например, левый груз опустился на расстояние Δx_1. Тогда, как легко видеть из рис. 72, правый груз поднимается на вдвое большее расстояние, т. е. он сдвинется на $\Delta x_2 = -2\Delta x_1$. Поскольку эти перемещения происходят за одно и то же время Δt, то таким же соотношением будут связаны и проекции скоростей, и проекции ускорений грузов в один и тот же момент времени:

$$v_{2x} = -2v_{1x}, \quad a_{2x} = -2a_{1x}.$$

Учитывая эту связь ускорений, можно из системы уравнений (14) найти проекции ускорений грузов и силы натяжения нити:

$$a_{1x} = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}\, g, \quad a_{2x} = -2a_{1x},$$
$$T = \frac{3m_1m_2}{m_1 + 4m_2}\, g, \quad T_1 = 2T, \quad T_2 = T. \qquad (15)$$

Если $m_1 > m_2$, то ускорение левого груза направлено вниз. Для нахождения направления движения нужно знать также начальную скорость. А для определения положения грузов в любой момент времени потребуется еще и знание их начального положения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Самолет выполняет «мертвую петлю», двигаясь в вертикальной плоскости по окружности радиуса R. Скорость самолета в нижней точке V_1, в верхней — V_2. С какой силой давит при этом на сиденье летчик, масса которого m?

2. Найдите силы натяжения нитей и ускорения грузов m_1, m_2 и m_3 в системе, показанной на рис. 73.

3. Найдите силу натяжения нити, ускорение грузов и силу давления на ось блока в системе, показанной на рис. 74. Известны массы грузов

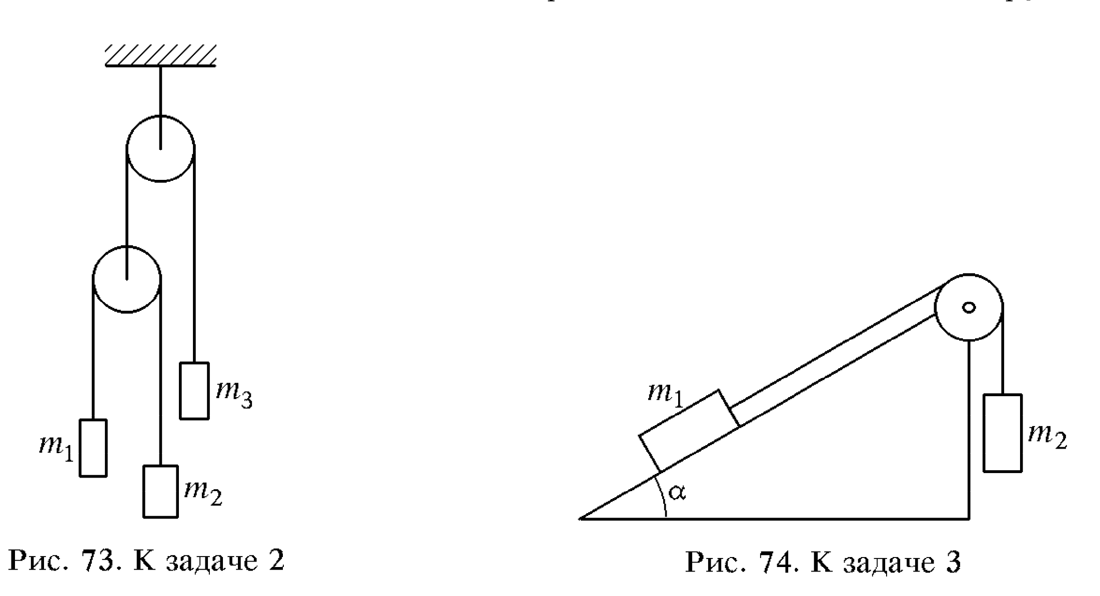


Рис. 73. К задаче 2

Рис. 74. К задаче 3

m_1 и m_2 и угол α, образуемый наклонной плоскостью с горизонтом. Трение отсутствует.

- Придумайте примеры задач, в которых законы динамики использовались бы как для нахождения ускорения, так и некоторых из действующих сил.
- Какова физическая природа сил реакции, фигурировавших в задачах 1 и 2?
- Опишите, какие ощущения человек должен испытать при перегрузке и в состоянии невесомости. Как должны отличаться ощущения космонавта при невесомости, испытываемой им в орбитальном полете и при тренировках в бассейне, где невесомость имитируется действием архимедовой выталкивающей силы?
- Шайба соскальзывает без трения с вершины ледяного полусферического купола. Будет ли она скользить по поверхности купола до самого его основания или оторвется от поверхности раньше?

§ 20. Силы в природе. Трение

В динамике Ньютона природа сил, входящих в основные уравнения, несущественна. Второй закон Ньютона определяет ускорение тела независимо от природы сил, сообщающих это ускорение. Разумеет-

ся, это не означает, что вопрос о физической природе сил вообще не представляет интереса.

Все многообразие встречающихся в природе взаимодействий в современной науке удается свести всего к трем различным типам. Это *гравитационное*, *сильное* (ядерное) и *электрослабое* взаимодействия. Электрослабое взаимодействие объединяет *электромагнитное* и так называемое *слабое* взаимодействия. Слабое взаимодействие, как и сильное, свойственно лишь элементарным частицам и проявляется на очень малых расстояниях, когда законы механики Ньютона уже неприменимы.

В мире макроскопических явлений электромагнитное взаимодействие проявляется независимо от слабого и описывается законами классической электродинамики — уравнениями Максвелла. Гравитационное взаимодействие в классической физике описывается законом всемирного тяготения Ньютона.

В отличие от *короткодействующих* сильного и слабого взаимодействий гравитационное и электромагнитное взаимодействия — *дальнодействующие*: их действие проявляется на очень больших расстояниях. По этой причине именно электромагнитное и гравитационное взаимодействия определяют все крупномасштабные явления, начиная от явлений на молекулярном уровне и кончая движением небесных тел. На самом деле только для электромагнитного и гравитационного взаимодействий и можно использовать понятие силы в смысле механики Ньютона и измерять ее на опыте.

Все механические явления в окружающем нас макроскопическом мире определяются исключительно гравитационными и электромагнитными силами. Проявления сил электромагнитной природы настолько многообразны, что было бы совершенно безнадежно пытаться описать их все единым образом. В дальнейшем при изучении законов электромагнетизма будут рассмотрены некоторые виды таких сил. Пока же, изучая механику, мы ограничимся только силами трения и упругими силами.

Возникновение сил трения и упругих сил обусловлено электрическими силами, действующими между заряженными частицами, из которых построены все макроскопические тела. При описании проявлений этих сил в механике мы ограничимся так называемым *феноменологическим* подходом: не вникая в природу этих сил, выясним условия, при которых они проявляются, и, опираясь на опыт, установим их количественные закономерности.

Виды трения. «Сухое» трение возникает на поверхностях соприкосновения твердых тел. Сила трения всегда направлена вдоль поверхности соприкосновения, в отличие от силы упругости, направленной перпендикулярно этой поверхности. Различают три вида трения при контакте твердых тел: *трение покоя, трение скольжения и трение качения.*

Трение покоя. Познакомимся сначала с проявлениями силы трения покоя. Пусть, например, на горизонтальной поверхности лежит брусок. Подействуем на него некоторой горизонтальной силой **F**, используя для ее измерения динамометр (рис. 75). Опыт показывает, что, пока эта сила меньше некоторого значения $F_{кр}$, брусок не приходит в движение. В соответствии со вторым законом Ньютона это может означать только одно: одновременно с приложенной внешней силой **F** на брусок со стороны поверхности подставки начинает действовать равная ей и противоположно направленная сила $\mathbf{F}_{тр}$, которую и называют силой трения покоя. Эти силы уравновешивают друг друга. Когда приложенная сила достигает критического значения $F_{кр}$, брусок приходит в движение. Действующая на движущийся брусок сила трения направлена противоположно его скорости и называется силой трения скольжения.

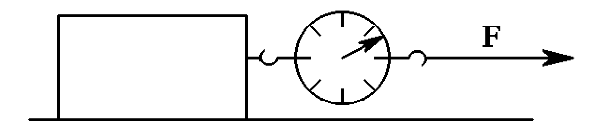


Рис. 75. Изменение минимальной силы, сдвигающей брусок

На опыте можно установить, от чего зависит максимальное значение силы трения покоя $F_{кр}$. Помещая на брусок дополнительные грузы и тем самым увеличивая силу, прижимающую его к поверхности подставки, убеждаемся, что максимальная сила трения покоя пропорциональна этой силе. Иначе об этом можно сказать, что максимальная сила трения покоя $F_{кр}$ пропорциональна нормальной силе N реакции опоры. Действительно, поскольку брусок не имеет ускорения в направлении, перпендикулярном поверхности, прижимающая сила уравновешивается действующей на брусок нормальной силой реакции. Таким образом, для модуля максимальной силы трения покоя можно написать

$$F_{кр} = \mu N, \qquad (1)$$

где коэффициент пропорциональности μ не зависит от прижимающей силы. Он называется *коэффициентом трения покоя*. Опыт показывает, что значение коэффициента трения не зависит от размеров соприкасающихся поверхностей. В описанном выше опыте брусок можно положить на поверхность любой из его граней: при одной и той же прижимающей силе нужно одинаковое усилие, чтобы сдвинуть брусок (рис. 76). При этом поверхность может и не быть горизонтальной, важно лишь значение прижимающей силы.

Коэффициент трения покоя μ зависит от сочетания материалов, из которых сделаны соприкасающиеся тела. Он будет разным при трении дерева о сталь и дерева о дерево. В технических справочниках приводятся значения для многих различных комбинаций. Но и для каждой такой комбинации коэффициент трения зависит от характера обработки поверхностей и их состояния.

В рассмотренном опыте трение покоя препятствовало возникновению движения. Благодаря трению покоя обеспечивается равнове-

сие многих технических конструкций и строительных сооружений. Однако в ряде случаев именно сила трения покоя необходима для возникновения движения. Так, например, при ходьбе сила трения покоя, действующая на подошву, сообщает нам ускорение. Ведь подошва не скользит назад, и, значит, трение между ней и дорогой —

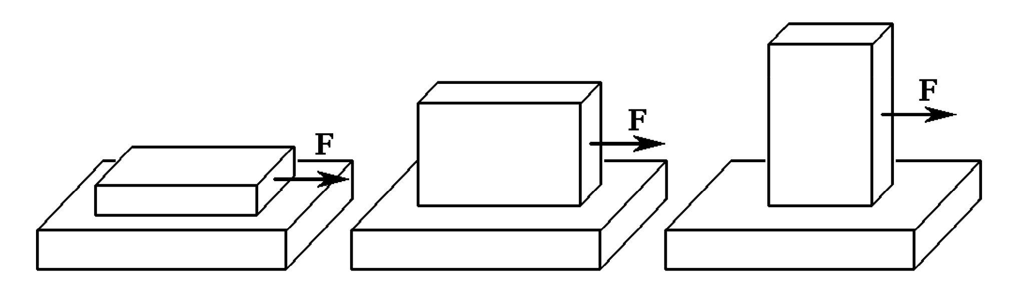


Рис. 76. Во всех трех положениях бруска на горизонтальной плоскости нужна одна и та же сила, чтобы сдвинуть его

это трение покоя. Трудно указать какую-либо машину, в движении которой по земле трение покоя не играло бы принципиальной роли. Шины ведущих колес автомобилей как бы отталкиваются от асфальта, и в отсутствие пробуксовки толкающая автомобиль сила — это сила трения покоя.

Трение скольжения. Сила трения скольжения также направлена вдоль поверхности соприкосновения тел, но в отличие от силы трения покоя, которая противоположна внешней силе, стремящейся сдвинуть тело, сила трения скольжения всегда направлена противоположно относительной скорости.

Модуль $F_{\text{тр}}$ силы трения скольжения, как и максимальной силы трения покоя, тоже пропорционален прижимающей силе, а значит, и нормальной силе N реакции опоры:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \qquad (2)$$

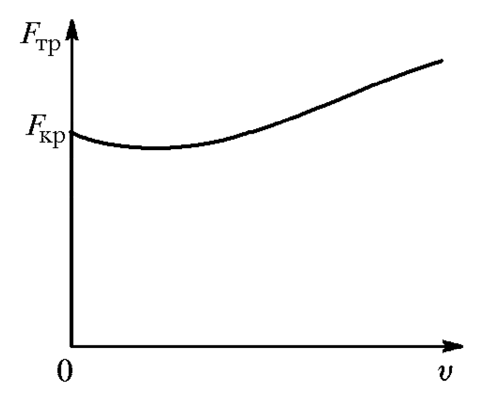


Рис. 77. Зависимость силы сухого трения от скорости

Коэффициент трения скольжения μ, как и при трении покоя, не зависит от прижимающей силы и площади соприкосновения, но сильно зависит от характера поверхностей, их обработки и степени чистоты. В общем случае коэффициент трения скольжения зависит от скорости скольжения (т. е. от относительной скорости). Обычно сила трения скольжения вначале уменьшается с увеличением скорости, а затем начинает постепенно возрастать. Типичный характер зависимости модуля силы сухого трения от модуля скорости показан на рис. 77. Эта характеристика силы трения передает также и особенности силы трения покоя: при равной нулю относительной ско-

рости сила трения может иметь любое значение, не превосходящее $F_{кр}$. Этому соответствует вертикальный участок характеристики, совпадающий с осью координат.

В некоторых практически важных случаях сила трения скольжения оказывается очень слабо зависящей от относительной скорости и примерно равной максимальной силе трения покоя. Обычно зависимостью коэффициента трения скольжения от скорости вообще пренебрегают, считая его постоянным в широком интервале изменения относительной скорости и равным коэффициенту трения покоя. Именно поэтому коэффициенты трения в формулах (1) и (2) обозначены одной и той же буквой μ.

Интересно отметить, что даже при неизменной относительной скорости значение силы трения скольжения не остается постоянным, а испытывает небольшие случайные колебания около среднего значения, определяемого формулой (2). Амплитуда таких колебаний зависит от обработки соприкасающихся поверхностей и, например, при скольжении отшлифованного алюминиевого бруска по полированной стальной поверхности не превышает 0,5% среднего значения силы трения. Подчеркнем, что коэффициент трения не поддается теоретическому вычислению на основе представлений о строении поверхностей, а определяется экспериментально.

Полная сила реакции. Строго говоря, полная сила **Q**, с которой одно тело действует на поверхность другого, направлена под некоторым углом φ к поверхности. Это показано на рис. 78*а*. Точка приложения силы **Q** может быть перенесена внутрь тела (рис. 78*б*) в том случае, когда тело рассматривается как материальная точка.

Во многих случаях силу **Q** удобно рассматривать как сумму двух сил: силы **N**, направленной по нормали к поверхности соприкосновения (нормальной силы реакции опоры), и силы $\mathbf{F}_{тр}$, направленной

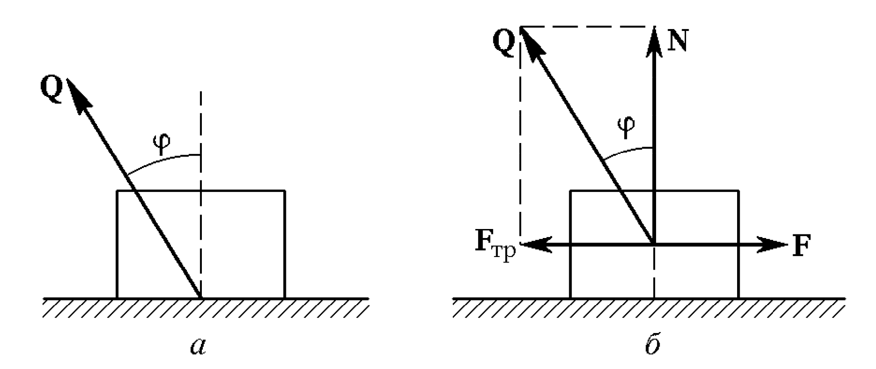


Рис. 78. Полная сила Q, с которой поверхность действует на тело, направлена под углом φ к нормали

по касательной. Удобство такого представления, как ясно из изложенного, заключается в том, что модули этих составляющих одной и той же силы **Q** при скольжении одного тела по поверхности другого связаны между собой соотношением (2). Это значит, что угол

φ, образуемый полной силой $\mathbf{Q}$ с нормалью к поверхности, для каждой пары поверхностей всегда имеет одно и то же значение, определяемое только коэффициентом трения. Из рис. 78*б* и соотношения (2) следует, что $\operatorname{tg}\varphi = F_{тр}/N = \mu$.

Проиллюстрируем применение изложенных выше закономерностей трения на следующих примерах.

Задачи

1. *Наклонная плоскость.* Коэффициент трения между доской и лежащим на ней бруском равен μ. Доску наклоняют на угол α к горизонту. С каким ускорением соскальзывает брусок?

Решение. На рис. 79 показаны действующие на брусок силы. Согласно второму закону Ньютона векторная сумма этих сил равна $m\mathbf{a}$:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр}. \qquad (3)$$

Относительно силы трения $\mathbf{F}_{тр}$, заранее известно только то, что она направлена вдоль поверхности доски (наклонной плоскости). Поэтому естественно записать уравнение (3) в проекциях на направления вдоль и поперек наклонной плоскости. Поскольку брусок может перемещаться только вдоль наклонной плоскости, то проекция его ускорения $\mathbf{a}$ на направление нормали к ней равна нулю, и уравнение (3) дает

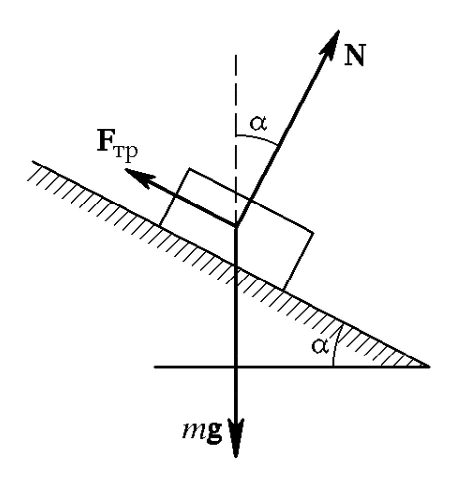


Рис. 79. Силы, действующие на брусок, соскальзывающий с наклонной плоскости

$$0 = N - mg\cos\alpha. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что нормальная сила N реакции не зависит от того, движется брусок или нет, и равна $mg\cos\alpha$.

Значение силы трения, напротив, зависит от того, движется брусок или нет: это может быть либо трение скольжения, либо трение покоя. Рассмотрим сначала случай, когда брусок покоится относительно доски. Тогда вторая проекция его ускорения $\mathbf{a}$ (проекция на направление вдоль наклонной плоскости) тоже равна нулю, и уравнение (3) дает

$$0 = mg\sin\alpha - F_{тр}, \qquad (5)$$

откуда $F_{тр} = mg\sin\alpha$. Видно, что значение силы трения покоя возрастает с увеличением наклона доски, т. е. угла α. Однако сила трения покоя не может превышать значения μN. Значение силы N, равное $mg\cos\alpha$, убывает с ростом угла α. Поэтому ясно, что существует некоторый предельный угол $\alpha_{кр}$, при котором неподвижный относительно доски брусок начнет соскальзывать с нее. Этот критический угол наклона доски находится из условия

$$mg\sin\alpha_{кр} = \mu mg\cos\alpha_{кр},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha_{кр} = \mu. \qquad (6)$$

Критический угол не зависит от массы бруска. Измерение этого угла позволяет на опыте определить коэффициент трения μ без использования приборов для измерения сил.

При постепенном увеличении наклона доски брусок остается неподвижным, пока угол α не достигнет значения $\alpha_{кр}$. При $\alpha > \alpha_{кр}$ сила трения $F_{тр}$ — это сила трения скольжения, и ее значение равно $\mu N = \mu mg \cos \alpha$. Направлена она в сторону, противоположную скорости бруска. В этом случае проекция уравнения (3) на направление вдоль наклонной плоскости

$$ma = mg \sin \alpha - F_{тр}$$

служит не для определения силы трения, а для нахождения ускорения бруска. Подставляя в это равенство $F_{тр} = \mu mg \cos \alpha$, находим

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \qquad (7)$$

Отметим, что при $\alpha < \alpha_{кр}$ выражение (7) формально дает отрицательное значение проекции ускорения, что не имеет физического смысла при условии, что вначале брусок был неподвижен. Однако этот результат имеет физический смысл, если брусок движется вниз по наклонной плоскости благодаря скорости, которую он уже имел в начальный момент. Действительно, при получении результата (7) использовалось не то, что $\alpha > \alpha_{кр}$, а лишь то, что сила трения скольжения направлена вверх вдоль наклонной плоскости. Именно так и будет, если, например, толчком сообщить бруску некоторую начальную скорость, направленную вниз. Отрицательное значение проекции ускорения при $\alpha < \alpha_{кр}$ означает, что брусок будет двигаться вниз равнозамедленно, пока не остановится.

Если же толчком сообщить бруску начальную скорость вверх вдоль наклонной плоскости, то сила трения скольжения будет сначала направлена вниз и ускорение бруска, как легко убедиться, будет даваться выражением

$$a = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Брусок будет двигаться вверх равнозамедленно, пока его скорость не обратится в нуль. Дальше он либо останется лежать неподвижно, если $\alpha < \alpha_{кр}$, либо начнет соскальзывать вниз с ускорением, даваемым формулой (7), если $\alpha > \alpha_{кр}$.

2. *Передвижение волоком.* Под каким углом α нужно тянуть за веревку тяжелый ящик массы m для того, чтобы передвигать его волоком по горизонтальной шероховатой поверхности с наименьшим усилием, если коэффициент трения равен μ? Каково значение этой минимальной силы?

Решение. Будем считать, что внешняя сила **F** приложена так, что ящик движется поступательно. В этом случае его можно рассматривать как материальную точку. Действующие на ящик силы показаны на рис. 80.

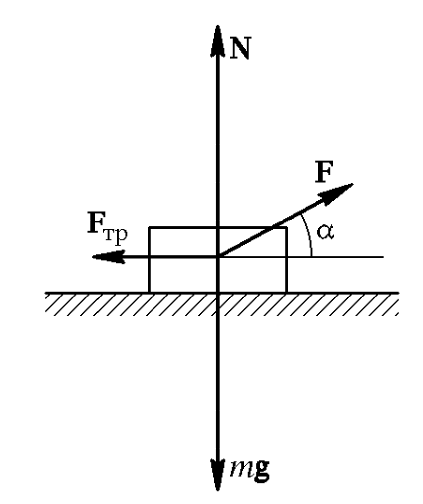


Рис. 80. Силы, действующие на ящик, передвигаемый волоком

Ясно, что внешняя сила F будет минимальной, когда ящик движется равномерно. При этом равнодействующая всех приложенных к ящику сил соглас-

но второму закону Ньютона равна нулю:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + m\mathbf{g} = 0. \tag{8}$$

Для исследования соотношения (8) запишем его в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \tag{9}$$

$$F \sin \alpha + N - mg = 0. \tag{10}$$

Задача заключается в том, чтобы исследовать зависимость силы F от угла α. Для этого необходимо исключить из уравнений (9) и (10) силу реакции N и силу трения $F_{\text{тр}}$, так как их значения тоже зависят от угла α. При скольжении ящика сила трения $F_{\text{тр}}$ выражается через нормальную силу реакции N с помощью соотношения (2): $F_{\text{тр}} = \mu N$. Выражая силу N из соотношения (10): $N = mg - F \sin \alpha$, получаем

$$F_{\text{тр}} = \mu (mg - F \sin \alpha).$$

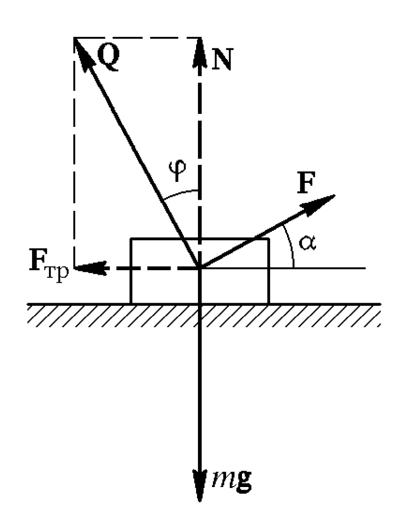
Подстановка этого выражения в (9) дает

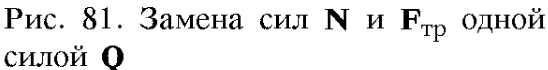
$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \tag{11}$$

Числитель в правой части (11) не зависит от α, поэтому сила F будет наименьшей, когда знаменатель максимален. Следовательно, нужно найти максимум выражения

$$f(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha.$$

Это можно сделать разными способами, например приравняв нулю его производную по α. В результате найдем, что значение $f(\alpha)$ максимально




Рис. 81. Замена сил $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ одной силой $\mathbf{Q}$

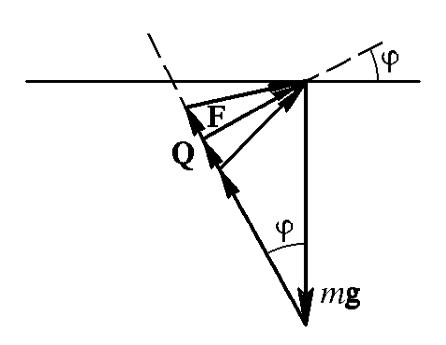


Рис. 82. К определению наименьшей силы $\mathbf{F}$

при $\operatorname{tg} \alpha = \mu$. При этом $f(\alpha) = 1/\cos \alpha$ и минимальная сила, как видно из (11), равна

$$F = \mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha. \tag{12}$$

Итак, тянуть за веревку следует так, чтобы она составляла с горизонтом угол $\alpha = \operatorname{arctg} \mu$. Значение минимальной силы дается формулой (12).

К ответам на вопросы этой задачи можно прийти гораздо быстрее, если с самого начала рассматривать силу **Q**, равную векторной сумме **N** и $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ (рис. 81). Как было выяснено, она всегда направлена под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ к нормали с поверхностью. Теперь условие равномерного движения ящика по горизонтальной шероховатой поверхности запишется в виде

$$\mathbf{F} + \mathbf{Q} + m\mathbf{g} = 0.$$

Это уравнение удобно исследовать графически. Прежде всего изобразим на чертеже известную по модулю и направлению силу $m\mathbf{g}$ (рис. 82). Что касается слагаемого **Q**, то нам заранее известно лишь его направление (см. рис. 81). Поэтому через конец вектора $m\mathbf{g}$ проводим прямую, составляющую угол $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ с вертикалью. На этой прямой будем откладывать силу **Q**, совмещая ее начало с концом вектора $m\mathbf{g}$. Положение конца вектора пока неизвестно. В соответствии с (13) сила **F** должна замыкать треугольник сил, т. е. соединять конец вектора **Q** с началом вектора $m\mathbf{g}$. Как видно из рис. 82, сила **F** будет наименьшей, когда ее направление перпендикулярно направлению **Q**, т. е. образует угол φ с горизонтом. Ее значение при этом, как видно из того же рисунка, есть $F = mg \sin \varphi$.

3. *Перемещение волоком с ускорением.* В условиях предыдущей задачи найдите наименьшую силу, сообщающую ящику заданное ускорение a по горизонтали.

Решение. Рассматривая сумму нормальной силы **N** реакции опоры и силы трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ как одну силу **Q**, направленную под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ к нормали с поверхностью, запишем второй закон Ньютона в виде

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{Q} + \mathbf{F}. \qquad (14)$$

Это уравнение, как и уравнение (13), удобно исследовать графически (рис. 83). Чтобы модуль силы **F** был минимален, и в этом случае сила **F** должна быть перпендикулярной силе **Q**, т. е. должна составлять тот же самый угол $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ с горизонтом. Выражая модуль силы $F_{\min}$ как сумму гипотенузы верхнего треугольника на рис. 83 и одного из катетов нижнего, после элементарных преобразований получаем

$$F = m(g \sin \varphi + a \cos \varphi). \qquad (15)$$

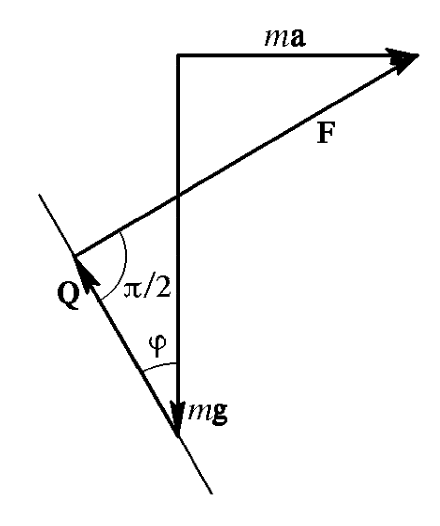


Рис. 83. Сложение сил при перемещении ящика с ускорением

Легко видеть, что этот результат удовлетворяет двум очевидным предельным случаям: при $a = 0$ из (15) получается ответ (12) предыдущей задачи, а при отсутствии трения ($\varphi = 0$) $F = ma$.

При достаточно большом ускорении a, когда $g/a < \mu$, перпендикуляр, опущенный из конца вектора **a**, пересечет направление **Q** ниже конца вектора $m\mathbf{g}$ и, поскольку сила **Q** не может быть направлена вниз, наименьшая по модулю сила **F** замыкает треугольник векторов $m\mathbf{g}$ и $m\mathbf{a}$, т. е. $\mathbf{Q} = 0$. В этом случае перемещаемый ящик просто не соприкасается с горизонтальной поверхностью, по которой его пере-

двигают. Из рис. 84 видно, что

$$F = m\sqrt{g^2 + a^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{a} < \mu.$$

4. *Блок и наклонная плоскость.* В системе, показанной на рис. 85, в начальный момент тела покоятся. Определите их ускорение и силу натяжения нити в последующие моменты времени. Массой блока и нити, а также трением в оси блока можно пренебречь.

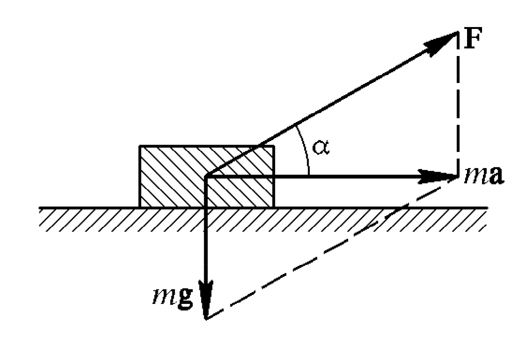


Рис. 84. Сложение сил при **Q** = 0

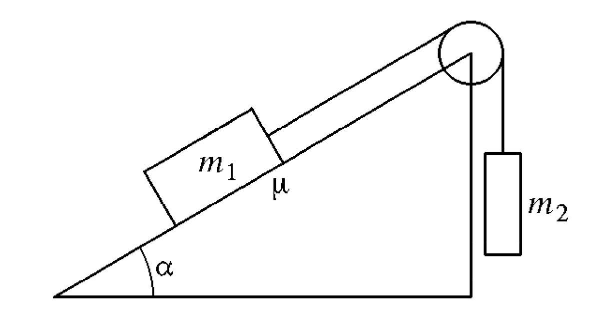


Рис. 85. Система с трением между бруском и наклонной плоскостью

Решение. Очевидно, для решения этой задачи следует рассмотреть действующие в системе силы и составить уравнения второго закона Ньютона для бруска на наклонной плоскости и подвешенного к нити груза. Здесь, однако, мы столкнемся с трудностью: для решения уравнений нужно знать, как направлены все действующие силы. Но как направлена действующая на брусок сила трения? Это зависит от направления его движения. Получается порочный круг: чтобы найти ускорение бруска, нужно знать направление этой силы, а чтобы найти ее направление, надо знать, в какую сторону будет двигаться неподвижный вначале брусок, т. е. знать направление его ускорения.

Можно, разумеется, перебрать последовательно все возможные варианты и отбросить те, что приводят к нелепому результату. Но проще для исключения подобных проблем сначала рассмотреть эту задачу, предположив, что трения нет. При наличии трения покоившиеся вначале бруски будут либо продолжать покоиться, либо придут в движение в ту же сторону, что и в отсутствие трения. Проделайте самостоятельно соответствующее исследование. Приведем ответ.

Тела покоятся ($a = 0$) при выполнении условия

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha < \frac{m_2}{m_1} < \sin \alpha + \mu \cos \alpha.$$

Сила натяжения нити при этом равна $m_2 g$.

Если, например, $m_2/m_1 > \sin \alpha + \mu \cos \alpha$, то груз m_2 опускается; при этом

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}, \quad T = m_2(g - a).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Склон горы образует угол α с горизонтом. Под каким углом β к склону горы следует тянуть за веревку, чтобы равномерно тащить санки в гору с наименьшим усилием? Какова должна быть эта сила?

2. На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, лежат одна на другой две доски. Возможны ли такие значения масс досок m_1 и m_2 и коэффициентов трения досок о плоскость μ_1 и друг о друга μ_2, при которых нижняя доска выскальзывала бы из-под верхней? В начальный момент доски покоятся.

3. Наклонная плоскость, составляющая угол α с горизонтом, движется с горизонтальным ускорением **a**, направленным так, как показано на рис. 86. Как будет двигаться лежащий на ней брусок, если коэффициент трения бруска о наклонную плоскость равен μ?

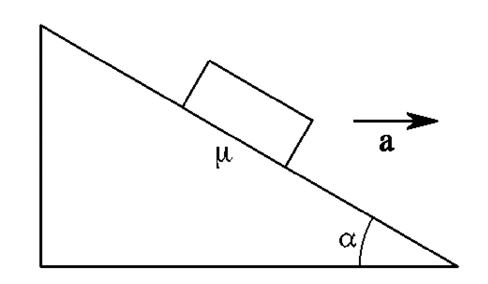


Рис. 86. Брусок на плоскости, движущейся с ускорением

4. Подставка с лежащей на ней монетой движется поступательно в горизонтальной плоскости по окружности радиуса r с угловой скоростью ω. Коэффициент трения монеты о подставку равен μ. Каким будет установившееся движение монеты относительно земли и относительно подставки?

- Что имеют в виду, когда говорят, что некоторый физический процесс описывается в рамках феноменологического подхода?
- Опишите различия между трением покоя и трением скольжения. Чем определяется направление силы трения покоя и силы трения скольжения?
- Как может быть направлена полная сила взаимодействия тела с поверхностью, к которой оно прижато? На какой максимальный угол может эта сила отклоняться от нормали к поверхности при сухом трении?
- Какой способ перемещения ящика по шероховатому горизонтальному полу требует меньших усилий: когда ящик толкают или когда его тянут?

§ 21. Проявления сухого трения

Использованный в предыдущем параграфе феноменологический подход позволил нам описать основные закономерности сухого трения, не вникая в детали физического механизма его возникновения. Эти закономерности могут получить естественное качественное объяснение, если рассматривать механизм возникновения трения на молекулярном уровне.

Как мы уже знаем, когда одно сухое тело скользит по поверхности другого, сила трения практически не зависит от скорости и площади их соприкосновения, но зависит от рода поверхностей и от силы, прижимающей тела друг к другу. На первый взгляд не ясно, почему закономерность оказывается такой простой.

Природа сил трения. Рассмотрим более детально границу соприкосновения двух тел. Под микроскопом поверхность тела испещ-

рена неровностями и состоит из своего рода впадин, равнин и холмов (рис. 87). Можно подумать, что трение обусловлено зацеплением выпуклостей друг за друга, но тогда сила трения должна была бы увеличиваться при увеличении площади поверхности соприкосновения тел. Однако опыт показывает, что это не так. Трение в действительности обусловлено не зацеплением выпуклостей друг за друга, а взаимодействием тел в точках соприкосновения на молекулярном уровне. Одним из подтверждений этого служит тот факт, что между очень гладкими поверхностями существует большое трение скольжения. Известно, как трудно протянуть электрический провод с гладкой изоляцией сквозь оболочку, шероховатый провод протянуть гораздо легче. Используемые в машиностроении стальные измерительные калибры с тщательно отполированными торцами (так называемые плитки Иогансона) благодаря межмолекулярному взаимодействию настолько сильно слипаются друг с другом, что для их разделения приходится прилагать значительные усилия.

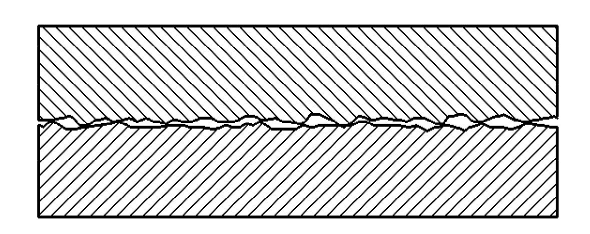


Рис. 87. Вид соприкасающихся поверхностей при сильном увеличении

Молекулярная модель трения объясняет, почему сила сухого трения не зависит от площади соприкосновения тел. Когда одно тело помещается на другое, только незначительный процент видимой площади соприкосновения действительно находится в контакте на молекулярном уровне. Тела практически соприкасаются лишь выпуклостями на своих неровных поверхностях. Фактическая площадь соприкосновения тел зависит от силы, прижимающей их друг к другу, и в первом приближении пропорциональна этой силе. Для показанных на рис. 76 прямоугольных брусков действительная область соприкосновения одинакова независимо от того, как они стоят. В данном случае эта область определяется только весом, а вес один и тот же при любом положении брусков. Если же сверху на брусок положить еще какой-нибудь груз, то брусок осядет немного ниже, так что действительная область соприкосновения на молекулярном уровне увеличится пропорционально прижимающей силе, хотя видимая площадь контакта останется такой же. Отсюда следует, что сила сухого трения должна быть пропорциональна прижимающей силе.

Молекулярная модель позволяет понять также, почему для данных поверхностей коэффициент трения покоя, как правило, несколько больше коэффициента трения скольжения. Когда одно тело начинает перемещаться по поверхности другого, первоначальные связи между молекулами оказываются разорванными и коэффициент трения резко уменьшается и остается практически постоянным при дальнейшем увеличении скорости.

Эта модель позволяет понять и то, почему трение качения меньше трения скольжения. Когда одно тело катится без проскальзывания по поверхности другого, молекулярные связи разрываются при подъеме точек катящегося тела, в то время как при скольжении точки тела смещаются вдоль поверхности контакта и на место разорванных связей сразу приходят новые.

Как управлять трением. Как уже упоминалось, в ряде случаев трение играет полезную роль и его стараются сделать как можно больше, например, трение между шинами автомобиля и дорогой. В других случаях требуется уменьшить трение, чтобы облегчить работу различных механизмов и избежать ненужных энергетических потерь. Этого можно добиться разными способами. Один из них — замена трения скольжения трением качения, что достигается применением шариковых и роликовых подшипников.

Другой распространенный способ уменьшения трения скольжения — использование смазки. Смазка не допускает образования устойчивых связей между молекулами движущихся твердых тел. При этом сухое трение между скользящими поверхностями заменяется вязким трением, т. е. трением между взаимно движущимися тонкими слоями жидкости. Закономерности сил трения при скольжении одного твердого тела по поверхности другого и при движении твердого тела в жидкости совершенно различны. Сила вязкого трения пропорциональна скорости и при медленном относительном движении становится очень малой.

Однако это не единственный способ уменьшения трения скольжения. Хорошо известно, что застрявший в доске гвоздь легче вытащить, если при этом его поворачивать из стороны в сторону. В

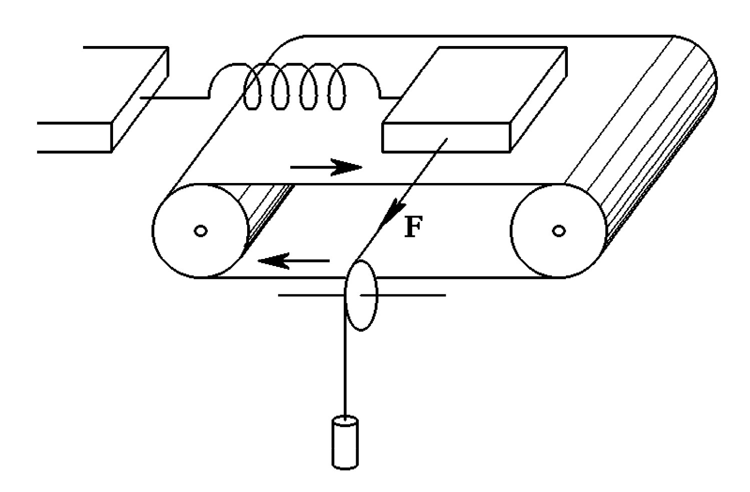


Рис. 88. Брусок на движущейся ленте транспортера

чем тут дело? Чтобы разобраться в этом, рассмотрим опыт, схема которого изображена на рис. 88. Брусок лежит на горизонтальной ленте транспортера, а пружина удерживает его от перемещения вместе с лентой при ее движении. Какая боковая сила **F** необходима

для того, чтобы вызвать перемещение бруска поперек ленты транспортера? Опыт показывает, что эта сила при движущейся ленте будет гораздо меньше, чем при неподвижной, и тем меньше, чем быстрее движется лента. Эти результаты легко объяснить на основе закономерностей сухого трения.

Значение действующей на брусок силы трения при его скольжении относительно ленты не зависит от скорости и равно произведению коэффициента трения μ на нормальную силу N реакции опоры, которая в данном случае равна весу бруска. Направлена сила трения противоположно скорости бруска относительно ленты. При неподвижной ленте боковое скольжение бруска будет происходить только тогда, когда действующая сила F не меньше μmg, где m — масса бруска.

Пусть теперь лента движется со скоростью $\mathbf{u}$ направо, тогда брусок относительно ленты имеет скорость $-\mathbf{u}$, направленную влево. Если при этом под действием боковой силы брусок перемещается поперек ленты с постоянной скоростью $\mathbf{v}$, то его полная скорость $\mathbf{V}$ относительно ленты составляет угол α с направлением

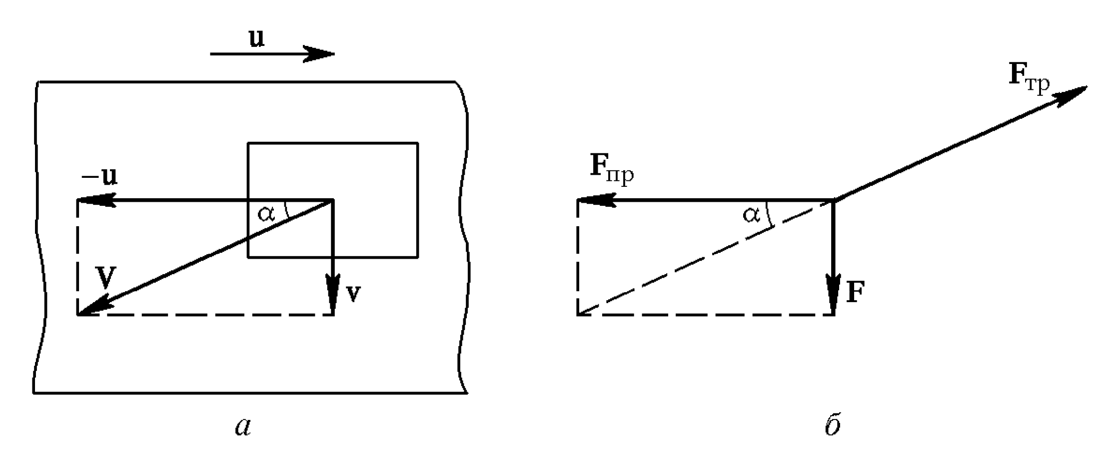


Рис. 89. Скорость бруска **V** относительно ленты транспортера (*а*) и направление силы трения (*б*)

движения ленты (рис. 89*а*), причем $\operatorname{tg}\alpha = v/u$. Сила трения скольжения и в этом случае равна μmg, но теперь она направлена противоположно вектору $\mathbf{V}$.

Векторная сумма силы $\mathbf{F}_{пр}$, действующей на брусок со стороны пружины, силы $\mathbf{F}$ и силы $\mathbf{F}_{тр}$ по второму закону Ньютона равна нулю, так как брусок движется без ускорения. При этом, как видно из рис. 89*б*,

$$F = F_{тр}\sin\alpha = \mu mg \sin\alpha. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что сила F, необходимая для бокового перемещения бруска, меньше μmg, и тем меньше, чем меньше угол α. Если скорость бокового скольжения бруска много меньше скорости ленты, т. е. $v \ll u$, то $\operatorname{tg}\alpha = v/u \ll 1$. При этом $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$ и формула (1)

принимает вид

$$F = \mu mg \frac{v}{u}. \qquad (2)$$

Итак, сила F, необходимая для бокового перемещения бруска, пропорциональна его скорости v при условии, что лента движется гораздо быстрее бруска. Медленное перемещение бруска поперек ленты будет вызываться сколь угодно малой силой.

«Занос» автомобиля. Рассмотренный пример позволяет уяснить причину бокового заноса автомобиля при резком торможении, когда происходит блокировка колес и автомобиль движется юзом. При качении колес без проскальзывания касающаяся дороги часть поверхности шины неподвижна и, следовательно, возможному боковому перемещению препятствует трение покоя. При блокировке колес происходит их проскальзывание относительно дороги и, как в случае бруска на движущейся ленте транспортера, даже ничтожная сила, действующая в поперечном направлении, будет приводить к боковому смещению колес. Оптимальное торможение автомобиля происходит в условиях, когда не допускается не только блокировка колес, но и проскальзывание шин относительно дороги.

- Положите длинную деревянную линейку на указательные пальцы разведенных в стороны рук и начните медленно, без рывков, сближать руки в горизонтальной плоскости. Объясните, почему скольжение линейки происходит поочередно то по одному, то по другому пальцу.
- Как следует поступать водителю при необходимости осуществить экстренное торможение автомобиля: следует ли резко нажать на педаль тормоза и заблокировать колеса? Будет ли тормозной путь при этом меньшим?
- Объясните, почему блокировка колес (юз) при торможении способствует возникновению заноса автомобиля?
- При шлифовке трущихся неровных поверхностей двух тел сила трения сначала убывает, а затем при достижении определенной гладкости поверхностей начинает возрастать. Почему?
- Чем объясняется независимость силы сухого трения от видимой площади контакта?
- Почему застрявший в доске гвоздь легче вытащить, если при этом поворачивать его из стороны в сторону?
- В ременных передачах приводной ремень соскальзывает обычно при остановке или резком уменьшении скорости ведомого шкива, например из-за заедания приводимого во вращение вала. Почему?

△ **Нелинейные свойства трения.** В принятой модели сухого трения сила трения скольжения считается не зависящей от скорости. Поэтому в условиях, когда прижимающая тело к поверхности сила неизменна, может сложиться впечатление, что рассмотрение дви-

жения при учете трения сводится к задаче о движении тела под действием постоянных сил. Однако из уже рассмотренных примеров ясно, что в действительности вопрос не так прост.

Вернемся к задаче о движении бруска по наклонной плоскости. В отсутствие трения движение бруска как вверх, так и вниз происходит с одним и тем же ускорением $g\sin\alpha$, так как уравнение второго закона Ньютона не зависит от направления движения бруска. При наличии трения, когда добавляется еще одна постоянная сила, дело не сводится просто к изменению значения ускорения, а ситуация становится качественно иной. Движение вверх и вниз теперь описывается *разными уравнениями*, и значение ускорения изменяется *скачком* при перемене направления движения. Здесь мы впервые сталкиваемся с проявлением так называемых *нелинейных* свойств. В рассматриваемом случае нелинейность проявляется в том, что уравнение движения (уравнение второго закона Ньютона) претерпевает качественные изменения в процессе движения: когда значение скорости проходит через нуль, одно уравнение заменяется другим.

Дополнительные сложности, связанные с сухим трением, возникают при криволинейном движении, когда при неизменном модуле силы трения ее направление непрерывно изменяется. Такой пример рассмотрен в следующей задаче.

Задача

Разгон на кольцевой трассе. Гонки мотоциклистов происходят по узкой круговой трассе. Трогаясь с места, мотоциклист стремится как можно быстрее набрать скорость. Какую часть круга он пройдет к моменту достижения максимально возможной для этой трассы скорости?

Решение. Будем считать, что мощность двигателя мотоцикла такова, что его максимальная скорость при движении по прямой больше возможной скорости на данной круговой трассе. Максимальная скорость на данной трассе ограничена тем, что центростремительное ускорение v^2/R мотоциклу сообщает сила трения колес о дорогу, максимальное значение которой равно μmg. Поэтому максимальная скорость на трассе определяется условием

$$\frac{mv_m^2}{R} = \mu mg$$

и равна

$$v_m = \sqrt{\mu g R}.$$

В процессе разгона мотоцикла эта максимальная сила трения (которую в дальнейшем будем обозначать через F) имеет составляющую, направленную по касательной к траектории, чтобы обеспечить возрастание скорости. Если мотоциклист стартует в точке A (рис. 90), то в произвольной точке участка разгона, положение которой определяется углом φ, направление действующей на мотоцикл силы трения $\mathbf{F}$ составляет некоторый острый угол α с направлением скорости $\mathbf{v}$. Поэтому

уравнение второго закона Ньютона в проекциях на касательное и нормальное к траектории направления имеет вид

$$m\,\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha, \tag{4}$$

$$m\,\frac{v^2}{R} = F\sin\alpha. \tag{5}$$

Продифференцируем уравнение (5) по времени, учитывая, что при разгоне изменяется не только скорость мотоцикла v, но и угол α, в то время как R и F остаются неизменными:

$$2m\,\frac{v\,dv}{R\,dt} = F\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dt}. \tag{6}$$

Подставляя в правую часть (6) $F\cos\alpha$ из уравнения (4), получаем связь между скоростью изменения угла α и скоростью мотоцикла:

$$2\,\frac{v}{R} = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{7}$$

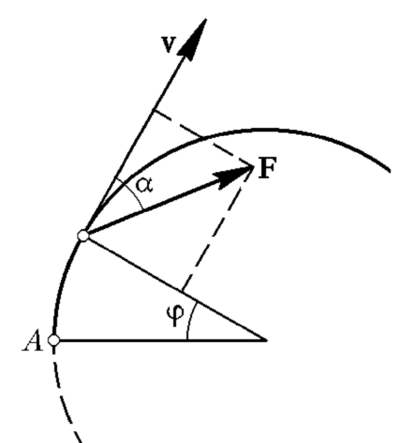


Рис. 90. Сила трения при разгоне по кольцевой трассе

При движении по окружности линейная скорость v связана с угловой скоростью $\omega = d\varphi/dt$ соотношением $v = R\,d\varphi/dt$. Поэтому равенство (7) принимает вид

$$2\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$$

— при оптимальном разгоне, использующем всю возможную силу сцепления колес с дорогой, скорость изменения угла α в каждый момент времени вдвое больше скорости изменения угла φ. В начальный момент, когда $\varphi = 0$, угол α также равен нулю: при трогании с места сила сцепления колес с дорогой направлена вперед. Поэтому в любой точке участка разгона $\alpha = 2\varphi$. В конце разгона $\alpha = \pi/2$: вся сила сцепления идет на сообщение центростремительного ускорения. Таким образом, разгон заканчивается при $\varphi = \pi/4$: участок разгона составляет всего одну восьмую часть круговой трассы.

В отличие от максимальной скорости v_{m}, значение которой определяется коэффициентом трения μ и радиусом R круговой трассы, ответ на поставленный в задаче вопрос не зависит от этих параметров — для всех круговых трасс при любом типе покрытия он один и тот же. От мотоциклиста требуется лишь умение обеспечить выполнение условий оптимального разгона. А это совсем не просто: нужно выдерживать правильный угол между скоростью и силой сцепления ведущего колеса с дорогой, добиваясь, чтобы в каждый момент она имела максимально возможное значение.

- Как известно, сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную относительной скорости. Однако в рассмотренной выше задаче считалось, что сила трения направлена под некоторым углом к скорости мотоциклиста. Нет ли здесь противоречия?

- Почему при движении с трением уравнение второго закона Ньютона имеет разный вид в зависимости от направления движения?▲

§ 22. Силы тяготения

Гравитационные силы описываются наиболее простыми количественными закономерностями. Но несмотря на эту простоту проявления сил тяготения могут быть весьма сложны и многообразны.

Гравитационные взаимодействия описываются *законом всемирного тяготения*, открытым Ньютоном:

Материальные точки притягиваются с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (1)$$

Гравитационная постоянная. Коэффициент пропорциональности G называется *гравитационной постоянной*. Эта величина характеризует интенсивность гравитационного взаимодействия и является одной из основных физических констант. Ее числовое значение зависит от выбора системы единиц и в единицах СИ равно $6{,}673\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг² (или м³/(кг·с²)). Из формулы (1) видно, что гравитационная постоянная численно равна силе притяжения двух точеных масс по 1 кг, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга. Значение гравитационной постоянной столь мало, что мы не замечаем притяжения между окружающими нас телами. Только из-за огромной массы Земли притяжение окружающих тел к Земле решающим образом влияет на все, что происходит вокруг нас.

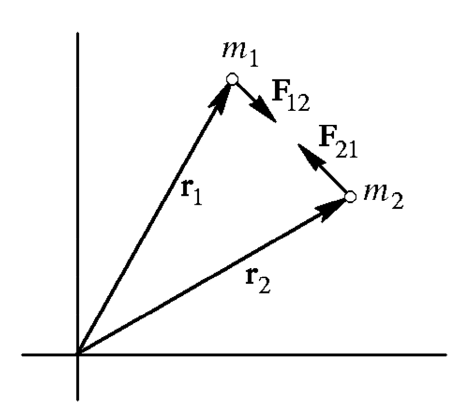


Рис. 91. Гравитационное взаимодействие

Формула (1) дает только модуль силы взаимного притяжения точечных тел. На самом деле речь в ней идет о двух силах, поскольку сила тяготения действует на каждое из взаимодействующих тел. Эти силы равны по модулю и противоположны по направлению в соответствии с третьим законом Ньютона. Они направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки. Такие силы называются *центральными*. Векторное выражение, например для силы $\mathbf{F}_{12}$, с которой тело массы m_2 действует на тело массы m_1 (рис. 91), имеет вид

$$F_{12} = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \qquad (2)$$

Хотя радиусы-векторы материальных точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ зависят от выбора начала координат, их разность, а значит, и сила $\mathbf{F}_{12}$ зависят только от взаимного расположения притягивающихся тел.

Законы Кеплера. К известной легенде о падающем яблоке, которое якобы навело Ньютона на мысль о тяготении, вряд ли следует относиться серьезно. При установлении закона всемирного тяготения Ньютон исходил из открытых Иоганном Кеплером на основании астрономических наблюдений Тихо Браге законов движения планет Солнечной системы. Три закона Кеплера гласят:

1. *Траектории, по которым движутся планеты, представляют собой эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

2. *Радиус-вектор планеты, проведенный из Солнца, ометает за равные промежутки времени одинаковые площади.*

3. *Для всех планет отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси эллиптической орбиты имеет одно и то же значение.*

Орбиты большинства планет мало отличаются от круговых. Для простоты будем считать их точно круговыми. Это не противоречит первому закону Кеплера, так как окружность представляет собой частный случай эллипса, у которого оба фокуса совпадают. Согласно второму закону Кеплера движение планеты по круговой траектории происходит равномерно, т. е. с постоянной по модулю скоростью. При этом третий закон Кеплера говорит о том, что отношение квадрата периода обращения T к кубу радиуса круговой орбиты R одинаково для всех планет:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{const}. \tag{3}$$

Движущаяся по окружности с постоянной скоростью планета обладает центростремительным ускорением, равным $4\pi^2 R/T^2$. Воспользуемся этим, чтобы определить силу, которая сообщает планете такое ускорение при выполнении условия (3). Согласно второму закону Ньютона ускорение планеты равно отношению действующей на нее силы к массе планеты:

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{F}{m}. \tag{4}$$

Отсюда, учитывая третий закон Кеплера (3), легко установить, как сила F зависит от массы m планеты и от радиуса R ее круговой орбиты. Умножая обе части (4) на R^2, видим, что в левой части согласно (3) стоит одинаковая для всех планет величина. Значит, и правая часть, равная FR^2/m, одинакова для всех планет. Поэтому $F \sim m/R^2$, т. е. сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца и прямо пропорциональна массе планеты. Но Солнце и планета выступают в их гравитационном

взаимодействии как равноправные партнеры. Они отличаются друг от друга только массами. И поскольку сила притяжения пропорциональна массе планеты m, то она должна быть пропорциональна и массе Солнца M:

$$F \sim \frac{mM}{R^2}.$$

Вводя в эту формулу коэффициент пропорциональности G, который уже не должен зависеть ни от масс взаимодействующих тел, ни от расстояния между ними, приходим к закону всемирного тяготения (1).

Гравитационное поле. Гравитационное взаимодействие тел можно описывать, используя понятие *гравитационного поля*. Ньютоновская формулировка закона всемирного тяготения соответствует представлению о непосредственном действии тел друг на друга на расстоянии, так называемом *дальнодействии*, без какого-либо участия промежуточной среды. В современной физике считается, что передача любых взаимодействий между телами осуществляется посредством создаваемых этими телами полей. Одно из тел непосредственно не действует на другое, оно наделяет окружающее его пространство определенными свойствами — создает гравитационное поле, особую материальную среду, которая и воздействует на другое тело.

Представление о физическом гравитационном поле выполняет как эстетические, так и вполне практические функции. Силы тяготения действуют на расстоянии, они тянут там, где, мы едва ли можем увидеть, чтó именно тянет. Силовое поле представляет собой некоторую абстракцию, заменяющую нам крюки, веревочки или резинки. Никакой наглядной картины поля дать невозможно, поскольку само понятие физического поля относится к числу основных понятий, которые невозможно определить через другие, более простые понятия. Можно только описать его свойства.

Рассматривая способность гравитационного поля создавать силу, мы считаем, что поле зависит только от того тела, со стороны которого действует сила, и не зависит от того тела, на которое она действует.

Отметим, что в рамках классической механики (механики Ньютона) оба представления — о дальнодействии и взаимодействии через гравитационное поле — приводят к одинаковым результатам и в равной мере допустимы. Выбор одного из этих способов описания определяется исключительно соображениями удобства.

Напряженность поля тяготения. Силовой характеристикой гравитационного поля является его *напряженность* $\mathbf{g}$, измеряемая силой, действующей на материальную точку единичной массы, т. е. отношением $\mathbf{F}/m$:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \qquad (5)$$

Очевидно, что гравитационное поле, создаваемое точечной массой M, обладает сферической симметрией. Это значит, что вектор напряженности $\mathbf{g}$ в любой его точке направлен к массе M, создающей поле. Модуль напряженности поля $g(r)$, как следует из закона всемирного тяготения (1), равен

$$g(r) = G\frac{M}{r^2} \qquad (6)$$

и зависит только от расстояния до источника поля. Напряженность поля точечной массы убывает с расстоянием по закону обратных квадратов. В таких полях движение тел происходит в соответствии с законами Кеплера.

Принцип суперпозиции. Опыт показывает, что гравитационные поля удовлетворяют *принципу суперпозиции*. Согласно этому принципу гравитационное поле, создаваемое какой-либо массой, не зависит от наличия других масс. Напряженность поля, создаваемого несколькими телами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых этими телами в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитывать гравитационные поля, создаваемые протяженными телами. Для этого нужно мысленно разбить тело на отдельные элементы, которые можно считать материальными точками, и найти векторную сумму напряженностей полей, создаваемых этими элементами. Пользуясь принципом суперпозиции, можно показать, что гравитационное поле, создаваемое шаром со сферически-симметричным распределением массы (в частности, и однородным шаром), вне этого шара неотличимо от гравитационного поля материальной точки такой же массы, как и шар, помещенной в центр шара. Это значит, что напряженность гравитационного поля шара дается той же формулой (6). Этот простой результат приводится здесь без доказательства. Оно будет дано для случая электростатического взаимодействия при рассмотрении поля заряженного шара, где сила также убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Притяжение сферических тел. Используя этот результат и привлекая третий закон Ньютона, можно показать, что два шара со сферически-симметричным распределением масс у каждого притягиваются друг к другу так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах, т. е. просто как точечные массы. Приведем соответствующее доказательство.

Пусть два шара массами m_1 и m_2 притягивают друг друга с силами $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ (рис. 92*а*). Если заменить первый шар точечной массой m_1 (рис. 92*б*), то создаваемое им гравитационное поле в месте расположения второго шара не изменится и, следовательно, не изменится сила $\mathbf{F}_{21}$, действующая на второй шар. На основании треть-

его закона Ньютона отсюда можно сделать вывод, что второй шар действует с одной и той же силой $\mathbf{F}_{12}$ как на первый шар, так и на заменяющую его материальную точку m_1. Эту силу легко найти, учитывая, что создаваемое вторым шаром гравитационное поле в

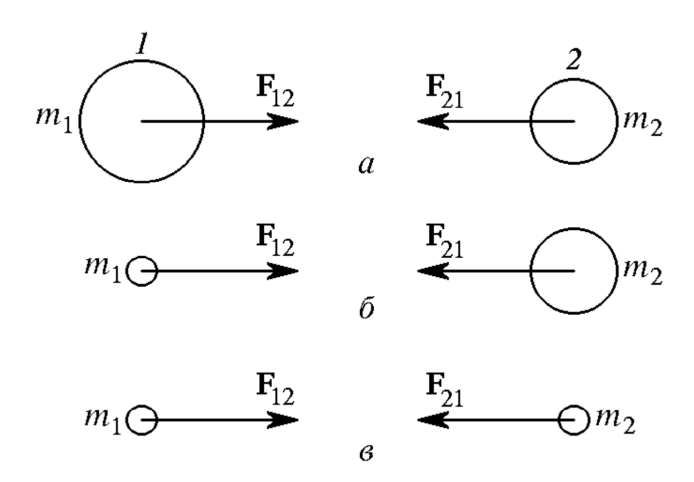


Рис. 92. Сферические тела притягиваются друг к другу так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах

том месте, где находится первый шар, неотличимо от поля точечной массы m_2, помещенной в его центр (рис. 92*в*). Таким образом, сила притяжения шаров совпадает с силой притяжения двух точечных масс m_1 и m_2, расстояние между которыми равно расстоянию между центрами шаров.

Из этого примера наглядно видна практическая ценность концепции гравитационного поля. В самом деле, было бы очень неудобно описывать силу, действующую на один из шаров, как векторную сумму сил, действующих на отдельные его элементы, учитывая при этом, что каждая из этих сил, в свою очередь, представляет собой векторную сумму сил взаимодействия этого элемента со всеми элементами, на которые мы должны мысленно разбить и второй шар. Обратим внимание еще и на то, что в процессе приведенного доказательства мы поочередно рассматривали в качестве источника гравитационного поля то один шар, то другой, в зависимости от того, интересовала ли нас сила, действующая на тот или на другой шар.

Теперь очевидно, что на любое находящееся вблизи поверхности Земли тело массы m, линейные размеры которого малы по сравнению с радиусом Земли, действует сила тяжести $\mathbf{F}$, которая в соответствии с (5) может быть записана как $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Значение модуля напряженности g гравитационного поля Земли дается выражением (6), в котором под M следует понимать массу земного шара, а вместо r следует подставить радиус Земли R:

$$F = mg = G\frac{mM}{R^2}. \tag{7}$$

Для применимости формулы (7) необязательно Землю считать однородным шаром, достаточно, чтобы распределение масс было сферически-симметричным.

Свободное падение. Если тело вблизи поверхности Земли движется только под действием силы тяжести F, т. е. *свободно падает*, то его ускорение $\mathbf{g}$ согласно второму закону Ньютона равно $\mathbf{F}/m$. Видно, что оно направлено к центру Земли и в соответствии с (7) по модулю равно

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M}{R^2}. \tag{8}$$

Но правая часть (8) дает значение напряженности гравитационного поля Земли вблизи ее поверхности. Итак, напряженность гравитационного поля и ускорение свободного падения в этом поле — это одно и то же. Именно поэтому мы сразу обозначили эти величины одной буквой $\mathbf{g}$.

Взвешивание Земли. Остановимся теперь на вопросе об экспериментальном определении значения гравитационной постоянной G. Прежде всего отметим, что его нельзя найти из астрономических наблюдений. Действительно, из наблюдений за движением планет можно найти только произведение гравитационной постоянной на массу Солнца. Из наблюдений за движением Луны, искусственных спутников Земли или за свободным падением тел вблизи земной поверхности можно найти только произведение гравитационной постоянной на массу Земли. Для определения G необходимо иметь возможность независимо измерить массу источника гравитационного поля. Это можно сделать только в опыте, производимом в лабораторных условиях.

Такой опыт был впервые выполнен Генри Кавендишем в 1798 г. с помощью крутильных весов, к концам коромысла которых были прикреплены небольшие свинцовые шары (рис. 93). Вблизи от них закреплялись большие тяжелые шары. Под действием сил притяжения малых шаров к большим коромысло крутильных весов немного поворачивалось, и по закручиванию упругой нити подвеса измерялась сила. Для интерпретации этого опыта важно знать, что шары взаимодействуют так же, как и соответствующие материальные точки такой же массы, ибо здесь в отличие от планет размеры шаров нельзя считать малыми по сравнению с расстоянием между ними.

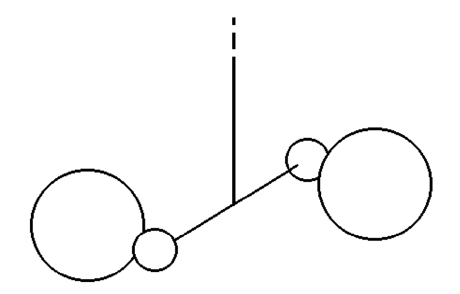


Рис. 93. Схема опыта Кавендиша

В своих опытах Кавендиш получил значение гравитационной постоянной G, всего на 1% отличающееся от принятого в настоящее время. В современных модификациях опыта Кавендиша производится измерение ускорений, сообщаемых малым шарам на коромысле гравитационным полем тяжелых шаров, что позволяет повысить точность измерений. Знание гравитационной постоянной позволяет определить массы Земли, Солнца и других источников тяготения по наблюдениям за движением тел в создаваемых ими гравитационных полях. В этом смысле опыт Кавендиша иногда образно называют взвешиванием Земли.

Всемирное тяготение описывается очень простым законом, который, как мы видели, легко устанавливается на основе законов Кеплера. В чем же величие открытия Ньютона? В нем нашла воплощение идея о том, что падение яблока на Землю и движение Луны вокруг Земли, которое тоже в известном смысле представляет собой падение на Землю, имеют общую причину. В те далекие времена это была удивительная мысль, поскольку общая мудрость гласила, что небесные тела движутся по своим «совершенным» законам, а земные объекты подчиняются «мирским» правилам. Ньютон пришел к мысли о том, что единые законы природы справедливы для всей Вселенной.

- Введите такую единицу силы, чтобы в законе всемирного тяготения (1) значение гравитационной постоянной G равнялось единице. Сравните эту единицу силы с ньютоном.
- Существуют ли отклонения от законов Кеплера для планет Солнечной системы? Чем они обусловлены?
- Как из законов Кеплера установить зависимость силы тяготения от расстояния?
- Почему гравитационную постоянную G нельзя определить на основе астрономических наблюдений?
- Что такое гравитационное поле? Какие преимущества дает описание гравитационного взаимодействия с помощью понятия поля по сравнению с представлением о дальнодействии?
- В чем заключается принцип суперпозиции для гравитационного поля? Что можно сказать о гравитационном поле однородного шара?
- Как связаны между собой напряженность гравитационного поля и ускорение свободного падения?
- Рассчитайте массу Земли M, используя значения гравитационной постоянной $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2), радиуса Земли $R = 6370$ км и ускорения свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

△ **Геометрия и тяготение.** С простой формулой закона всемирного тяготения (1) связано несколько тонких моментов, заслуживающих отдельного обсуждения. Из законов Кеплера следует,

что расстояние r в знаменатель выражения для силы тяготения входит во второй степени. Вся совокупность астрономических наблюдений приводит к выводу, что значение показателя степени равно двум с очень высокой точностью, а именно 2,000 000 000. Этот факт в высшей степени замечателен: точное равенство показателя степени двум отражает *евклидову природу* трехмерного физического пространства. Это значит, что положение тел и расстояние между ними в пространстве, сложение перемещений тел и т. д. описывается геометрией Евклида. Точное равенство двум показателя степени подчеркивает то обстоятельство, что в трехмерном евклидовом мире поверхность сферы точно пропорциональна квадрату ее радиуса.

Инертная и гравитационная массы. Из приведенного вывода закона тяготения следует также, что сила гравитационного взаимодействия тел пропорциональна их массам, а точнее — *инертным массам*, фигурирующим во втором законе Ньютона и описывающим инертные свойства тел. Но инертность и способность к гравитационным взаимодействиям представляют собой совершенно разные свойства материи.

В определении массы на основе инертных свойств используется закон $F = ma$. Измерения массы в соответствии с этим ее определением требуют проведения динамического эксперимента — прикладывается известная сила и измеряется ускорение. Именно так с помощью масс-спектрометров определяются массы заряженных элементарных частиц и ионов (а тем самым и атомов).

В определении массы на основе явления тяготения используется закон $F = Gm_1m_2/r^2$. Измерение массы в соответствии с таким определением производится с помощью статического эксперимента — взвешиванием. Тела располагают неподвижно в гравитационном поле (обычно это поле Земли) и сравнивают действующие на них силы тяготения. Определенная таким образом масса называется *тяжелой* или *гравитационной*.

Будут ли значения инертной и гравитационной масс одинаковыми? Ведь количественные меры этих свойств в принципе могли бы быть различными. Впервые ответ на этот вопрос был дан Галилеем, хотя он, по-видимому, и не подозревал об этом. В своих опытах он намеревался доказать, что неверны господствовавшие тогда утверждения Аристотеля о том, что тяжелые тела падают быстрее легких.

Чтобы лучше проследить за рассуждениями, обозначим инертную массу через $m_{\text{ин}}$, а гравитационную — через $m_{\text{гр}}$. На поверхности Земли сила тяжести F тогда запишется как

$$F = G\,\frac{m_{\text{гр}}M_{\text{З}}}{R^2} = m_{\text{гр}}g,$$

где g — напряженность гравитационного поля Земли, одинаковая для всех тел. Теперь сравним, что произойдет, если два тела одновременно сбросить с одной высоты. В соответствии со вторым законом Ньютона для каждого из тел можно написать

$$m_{\text{ин}} a = m_{\text{гр}} g,$$

откуда

$$a = \frac{m_{\text{гр}}}{m_{\text{ин}}} g.$$

Но опыт показывает, что ускорения обоих тел одинаковы. Следовательно, одним и тем же будет для них и отношение $m_{\text{гр}}/m_{\text{ин}}$. Итак, для всех тел

$$\frac{m_{\text{гр}}}{m_{\text{ин}}} = \text{const}$$

— гравитационные массы тел пропорциональны их инертным массам. Надлежащим выбором единиц их можно сделать просто равными.

Совпадение значений инертной и гравитационной масс подтверждалось много раз со все возрастающей точностью в разнообразных опытах ученых разных эпох — Ньютона, Бесселя, Этвеша, Дикке и, наконец, Брагинского и Панова, которые довели относительную погрешность измерений до 10^{-12}. Чтобы лучше представить себе чувствительность приборов в таких опытах, отметим, что это эквивалентно возможности обнаружить изменение массы теплохода водоизмещением в тысячу тонн при добавлении к нему одного миллиграмма.

В ньютоновской механике совпадение значений инертной и гравитационной масс не имеет под собой физической причины и в этом смысле является случайным. Это просто экспериментальный факт, установленный с очень высокой точностью. Если бы это было не так, ньютоновская механика ничуть не пострадала бы. В созданной Эйнштейном релятивистской теории тяготения, называемой также общей теорией относительности, равенство инертной и гравитационной масс имеет принципиальное значение и изначально заложено в основу теории. Эйнштейн предположил, что в этом совпадении нет ничего удивительного или случайного, ибо в действительности инертная и гравитационная массы представляют собой одну и ту же физическую величину.

- Почему значение показателя степени, в которой расстояние между телами входит в закон всемирного тяготения, связано с евклидовостью трехмерного физического пространства?
- Как определяются инертная и гравитационная массы в механике Ньютона? Почему в некоторых книгах даже не упоминается об этих величинах, а фигурирует просто масса тела?

- Предположим, что в некотором мире гравитационная масса тел никак не связана с их инертной массой. Что можно было бы наблюдать при одновременном свободном падении разных тел?
- Какие явления и опыты свидетельствуют о пропорциональности инертной и гравитационной масс? ▲

§ 23. Движение в поле тяготения

Рассмотрим некоторые примеры движения тел, когда единственная действующая на тело сила — это сила тяготения. В случаях, когда речь идет о движении брошенного камня или снаряда, выпущенного из пушки, поле тяготения Земли в пределах траектории можно считать однородным. При этом действующая на тело сила всюду одинакова и в соответствии со вторым законом Ньютона движение происходит с постоянным ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Фактически это соответствует приближению «плоской Земли», когда вектор ускорения всюду направлен одинаково, вертикально вниз, а его модуль 9,8 м/с^2 принимается равным значению $GM_З/R^2$ напряженности гравитационного поля вблизи поверхности Земли. Такое движение было подробно изучено ранее в главе, посвященной кинематике. Напомним, что траектория в этом случае представляет собой параболу с вертикальной осью симметрии.

Приближение «плоской Земли» справедливо лишь при сравнительно небольших скоростях, пока перемещение тела мало по сравнению с радиусом Земли. В противном случае необходимо учитывать изменение вектора $\mathbf{g}$ напряженности гравитационного поля либо по модулю (при движении в радиальном направлении), либо по направлению (при движении вдоль поверхности шарообразной Земли), либо то и другое вместе.

Выясним сначала, возможно ли свободное движение тела параллельно земной поверхности. Очевидно, что в приближении «плоской Земли» это невозможно, так как параболическая траектория непременно пересечет плоскую поверхность Земли. Если же принять во внимание кривизну земной поверхности, то при некотором (достаточно большом) значении горизонтальной скорости движение вдоль поверхности становится возможным.

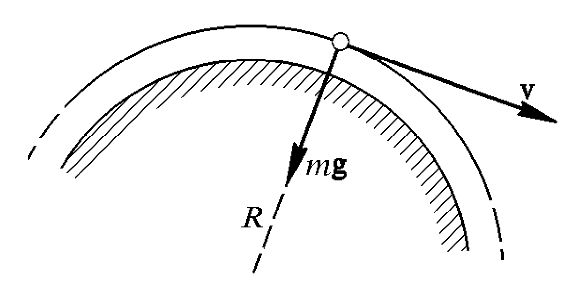


Рис. 94. Движение по низкой круговой орбите

Первая космическая скорость. В этом случае траектория тела представляет собой окружность, стелющуюся параллельно земной поверхности (рис. 94), а соответствующая скорость движения тела называется *первой космической ско-*

ростью $V_{\rm I}$. Ее значение легко найти из условия, что в рассматриваемом случае в соответствии со вторым законом Ньютона центростремительное ускорение v^2/R телу сообщает сила тяжести mg:

$$\frac{mV_{\rm I}^2}{R} = mg, \tag{1}$$

откуда

$$V_{\rm I} = \sqrt{gR} = 7{,}9 \text{ км/с}. \tag{2}$$

Приведенное значение первой космической скорости получается при подстановке в формулу значения ускорения свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2 и радиуса Земли $R = 6370$ км.

В действительности такое движение, разумеется, невозможно из-за сопротивления воздуха. Движение спутника Земли по круговой орбите возможно только тогда, когда орбита пролегает выше атмосферы. Самые низкие круговые орбиты спутников проходят на высоте более 100 км.

Круговая скорость. Скорость на такой круговой орбите радиуса $r > R$ называется *круговой*, и ее значение зависит от высоты h орбиты над поверхностью Земли. Для ее определения в правую часть уравнения второго закона Ньютона (1) следует вместо mg подставить значение силы тяготения на расстоянии $r = R + h$ от центра Земли:

$$\frac{mv_{\text{кр}}^2}{r} = G\frac{mM_{\text{З}}}{r^2}, \tag{3}$$

откуда

$$v_{\text{кр}}^2 = G\frac{M_{\text{З}}}{r}. \tag{4}$$

Формуле (4) можно придать другой, несколько более удобный вид, если выразить $GM_{\text{З}}$ через ускорение свободного падения g у поверхности Земли: $GM_{\text{З}} = gR^2$. Тогда

$$v_{\text{кр}}^2 = \frac{gR^2}{r} = \frac{gR^2}{R+h}. \tag{5}$$

С увеличением высоты орбиты круговая скорость уменьшается. Для высот h, малых по сравнению с радиусом Земли R, выражение для $v_{\text{кр}}$ можно упростить, используя приближенную формулу

$$(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} \quad (x \ll 1)$$

В этом случае из (5) получаем

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{R}{R+h}} = V_{\rm I}\frac{1}{\sqrt{1+h/R}} \approx V_{\rm I}\left(1 - \frac{h}{2R}\right). \tag{6}$$

Из (6) видно, что для круговой орбиты на высоте, например, 200 км скорость меньше первой космической приблизительно на 1/64 ее часть, т. е. на 124 м/с.

Задачи

1. *Расстояние до Луны.* Звездный месяц, т. е. период T обращения Луны вокруг Земли в гелиоцентрической системе отсчета, равен 27,32 суток. Зная радиус Земли $R = 6370$ км и ускорение свободного падения у ее поверхности $g = 9{,}81$ м/с^2, найдите расстояние r до Луны.

Решение. Считая, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса r, и применяя второй закон Ньютона к ее движению под действием силы притяжения к Земле, получаем, аналогично (5), для скорости Луны

$$v_{\text{Л}}^2 = g\,\frac{R^2}{r}. \qquad (7)$$

Скорость $v_{\text{Л}}$ связана с радиусом r орбиты Луны и периодом обращения T соотношением $v_{\text{Л}} = 2\pi r/T$. Подставляя $v_{\text{Л}}$ в (7), находим

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 3{,}83\cdot 10^5 \text{ км}. \qquad (8)$$

2. *Плотность солнечного вещества.* Зная радиус Солнца $R_{\text{С}} = 6{,}96\cdot 10^5$ км, радиус земной орбиты $r = 1{,}5\cdot 10^8$ км и период обращения Земли вокруг Солнца $T = 1$ год, найдите среднюю плотность солнечного вещества. Найдите также минимально возможный период обращения спутника Солнца.

Решение. Применяя второй закон Ньютона к движению Земли по круговой орбите вокруг Солнца, аналогично (4) получаем

$$v^2 = G\,\frac{M_{\text{С}}}{r},$$

где $M_{\text{С}}$ — масса Солнца. Подставляя сюда значение скорости $v = 2\pi r/T$, для массы Солнца находим

$$M_{\text{С}} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

Отсюда для средней плотности ρ солнечного вещества получаем

$$\rho = \frac{M_{\text{С}}}{(4/3)\pi R_{\text{С}}^3} = \frac{3\pi r^3}{GT^2R_{\text{С}}^3} = 1{,}4 \text{ г/см}^3. \qquad (9)$$

Минимальный период обращения был бы у спутника Солнца, обращающегося по орбите, стелющейся над его поверхностью, так как именно у такого спутника длина орбиты наименьшая, а скорость наибольшая. Это ясно и непосредственно из третьего закона Кеплера. Искомый минимальный период можно выразить через среднюю плотность солнечного вещества прямо из формулы (9), положив в ней $r = R_{\text{С}}$:

$$T = \left(\frac{3\pi}{G\rho}\right)^{1/2} \approx 10^4 \text{ с},$$

что составляет менее трех часов. Обратим внимание на то, что период обращения спутника по стелющейся орбите зависит только от средней плотности вещества, из которого состоит центральное притягивающее тело, и не зависит от его размеров.

Кеплерово движение. Круговое движение под действием ньютоновской силы притяжения представляет собой частный случай так называемого *кеплерова движения*, описываемого законами Кеплера. Чтобы спутник, поднятый на некоторую высоту, двигался по круговой орбите, ему нужно сообщить вполне определенную горизонтальную скорость. Если в какой-либо точке сообщить спутнику горизонтальную скорость, несколько большую круговой, он будет двигаться по эллиптической орбите, у которой данная точка будет *перигеем*, т. е. ближайшей к Земле точкой орбиты, а наиболее удаленная точка — *апогей* — будет лежать на противоположном конце прямой,

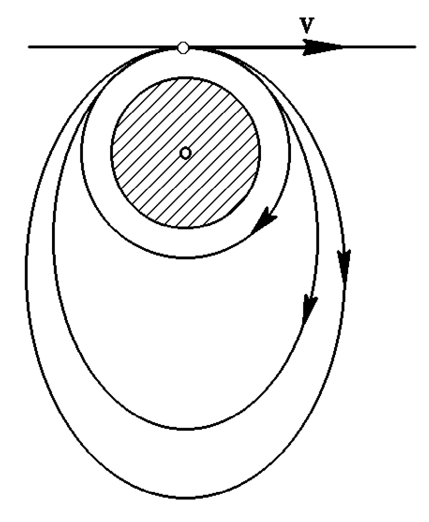


Рис. 95. Круговая и эллиптическая орбиты при разных значениях начальной скорости

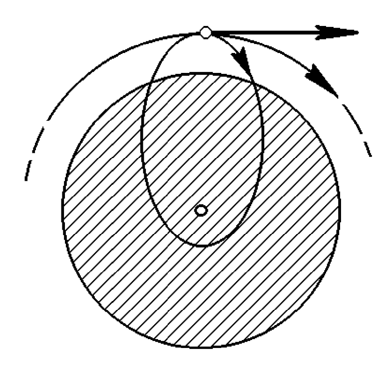


Рис. 96. Эллиптическая орбита в случае начальной скорости, меньшей круговой

проведенной из перигея через фокус эллипса, в котором находится центр Земли (рис. 95). Перигей и апогей находятся на противоположных концах большой оси эллипса.

Если же спутнику сообщить горизонтальную скорость, меньшую круговой, то он будет двигаться по эллиптической орбите, у которой начальная точка будет не перигеем, а апогеем, и, следовательно, центр Земли будет расположен в дальнем от нее фокусе эллипса (рис. 96). Периодическое движение по такой орбите возможно, разумеется, лишь тогда, когда она не пересекает поверхности Земли.

Существование замкнутых орбит — это замечательная особенность поля, в котором сила изменяется по закону обратных квадратов. Закономерности движения по эллиптическим орбитам будут подробнее рассмотрены после изучения законов сохранения.

Кроме замкнутых орбит в ньютоновском поле тяготения возможно движение по незамкнутым орбитам, когда тело приближается из бесконечности и, изменив направление движения под действием силы тяготения, снова уходит в бесконечность. Траектория в этом случае представляет собой гиперболу. Траектория, отделяющая замкнутые орбиты от незамкнутых, представляет собой параболу (эта парабола не имеет никакого отношения к параболе, по которой движется брошенное тело в приближении «плоской Земли»).

Конические сечения. Любое движение в поле тяготения как по замкнутым, так и по незамкнутым траекториям происходит по одному из так называемых *конических сечений* — кривых, которые

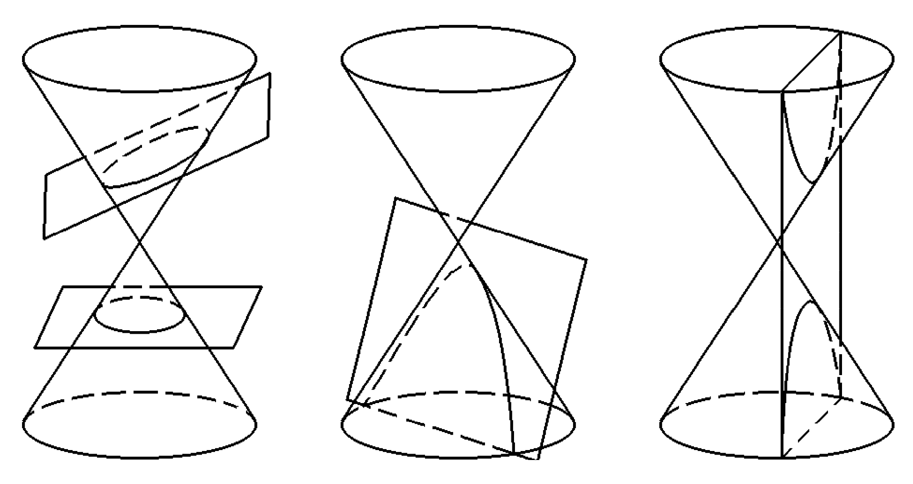


Рис. 97. Конические сечения

получаются при пересечении кругового конуса с плоскостью (рис. 97). В зависимости от наклона плоскости к оси конуса могут получиться окружность, эллипс, парабола и гипербола.

Незамкнутые траектории возможны не только тогда, когда тело приходит из бесконечности, но и тогда, когда ему сообщают достаточно большую начальную скорость в точке, находящейся на конечном расстоянии. Этот вопрос будет рассмотрен подробнее после изучения законов сохранения.

Сила тяжести внутри Земли. Закон обратных квадратов справедлив для поля тяготения, создаваемого точечной массой или шарообразным телом вне его пределов. Внутри шара поле тяготения будет совсем другим. Каким же именно? Будем, например, считать, что Земля представляет собой сплошной однородный шар. Выясним, как действующая на пробное тело сила тяжести зависит от его положения в стволе воображаемой шахты, прорытой от поверхности до центра Земли.

Очевидно, что в центре Земли эта сила равна нулю. Это непосредственно следует из симметрии: если бы сила вдруг оказалась

там отлична от нуля, то куда бы она была направлена? Ведь ни одному из направлений нельзя отдать предпочтение. Чтобы найти силу тяжести в произвольной точке на некотором расстоянии r от центра Земли ($r < R$), разобьем мысленно земной шар на тонкие сферические концентрические слои вокруг центра Земли (рис. 98). Согласно принципу суперпозиции полная сила тяжести, действующая на пробное тело на расстоянии r от центра, равна векторной сумме сил, действующих на него со стороны отдельных концентрических слоев.

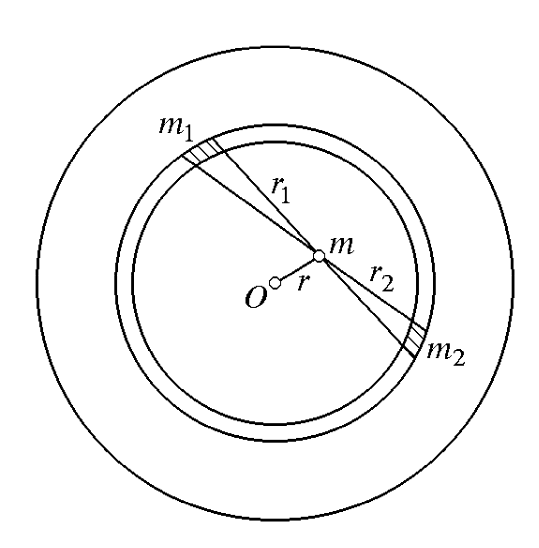


Рис. 98. К расчету силы тяготения на расстоянии r от центра Земли

Легко убедиться в том, что сила тяготения, действующая со стороны любого слоя на тело, находящееся внутри этого слоя, равна нулю. Это сразу видно из построения, показанного на рис. 98. Малые части сферической оболочки с массами m_1 и m_2 притягивают пробное тело массы m с силами, пропорциональными этим массам и обратно пропорциональными квадратам расстояний r_1 и r_2. Но сами массы m_1 и m_2, как видно из рисунка, пропорциональны квадратам соответствующих расстояний. Действительно, показанные на этом рисунке треугольники подобны, а площади участков оболочки с массами m_1 и m_2 пропорциональны квадратам их линейных размеров. В результате силы тяготения, действующие со стороны выделенных участков сферического слоя, уравновешиваются, что и доказывает сделанное утверждение, так как вся оболочка может быть разбита на такие пары элементов.

Подобными рассуждениями отсутствие силы тяготения внутри сферической оболочки было установлено еще Ньютоном.

Таким образом, на тело в стволе шахты в точке A (рис. 99) действует сила тяжести только со стороны заштрихованного шара, на поверхности которого находится это тело. Так как масса однородного заштрихованного шара пропорциональна кубу его радиуса r, а сила тяготения пропорциональна массе и в то же время обратно пропорциональна квадрату радиуса, то эта сила в конечном счете оказывается просто пропорциональна радиусу шара: $F \sim r$. Коэффициент пропорциональности проще всего найти, учитывая, что на поверхности Земли, когда $r = R$, сила тяжести равна mg. На произвольном расстоянии r от центра при $r \leqslant R$, очевидно,

$$F(r) = \frac{mgr}{R}. \tag{10}$$

Так как при $r > R$ сила тяжести убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, график зависимости силы тяжести $F(r)$ имеет вид, показанный на рис. 100.

Совсем иной характер зависимости силы тяготения от r внутри Земли означает, что при движении тела со скоростью, меньшей круговой, движение по пересекающей Землю эллиптической

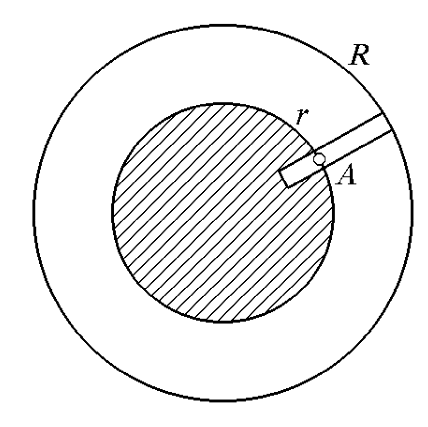


Рис. 99. Сила тяготения в точке A обусловлена только заштрихованной части земного шара

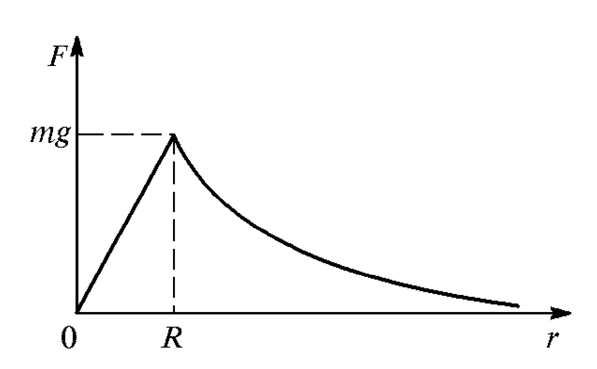


Рис. 100. Зависимость силы тяготения от расстояния до центра Земли

траектории с дальним фокусом в центре Земли невозможно, даже если прорыть туннель вдоль этой траектории и выкачать из него воздух.

- Современные астрономические средства наблюдений позволяют измерить скорость разных участков кольца планеты Сатурн. Можно ли из таких наблюдений установить, является ли кольцо сплошным?
- Почему из наблюдений за движением планеты под действием силы притяжения к Солнцу невозможно определить ее массу? Как найти массу планеты по наблюдениям за ее спутниками?
- Когда телу над Землей сообщена горизонтальная скорость, меньшая круговой, то, как было сказано, оно движется по траектории, представляющей собой часть эллипса с дальним фокусом в центре Земли. Как согласовать этот факт с известным утверждением, что брошенное горизонтально тело движется в поле тяжести Земли по параболе?
- Может ли прилетевший из бесконечности метеор, не задевший земной атмосферы, стать спутником Земли?
- Как стало бы двигаться тело, которое уронили в воображаемый туннель, прорытый по диаметру Земли?
- Решите задачу 1, учитывая, что в действительности Земля и Луна обращаются вокруг их общего центра масс.

§ 24. Силы упругости и деформации

По своей физической природе силы упругости ближе к силам трения, чем к гравитационным силам, поскольку они в конечном счете обусловлены взаимодействием заряженных частиц, из которых построены все тела. Однако в отличие от сил трения скольжения, возникающих при относительном движении тел, силы упругости определяются только взаимным расположением взаимодействующих тел и возникают только при их деформации.

Виды деформаций. Для твердых тел различают два предельных случая деформации: упругие и пластические. Если после прекращения внешнего воздействия деформированное тело восстанавливает свою форму и размеры, то деформация называется *упругой*. Для упругой деформации характерно существование однозначной связи между величиной деформации и вызывающей ее силой. Именно это свойство было положено в основу введенного способа измерения сил с помощью динамометра.

Деформации, не исчезающие после прекращения действия сил, называются *пластическими*.

Закон Гука. Опыт показывает, что почти у всех твердых тел при малых упругих деформациях величина деформации пропорциональна вызывающей ее силе. Это утверждение носит название *закона Гука*. При больших деформациях связь между деформациями и силами перестает быть линейной, а затем и вообще становится неоднозначной, т. е. деформация зависит от предыстории. Деформация становится пластической. При этом тело остается деформированным хотя бы частично и после прекращения действия внешних сил.

Таким образом, будет ли деформация упругой или пластической, зависит не только от материала тела, но и от того, насколько велики приложенные силы. Упругие деформации используются всюду, начиная от различного типа амортизационных устройств (рессор, пружин и т. д.) и кончая тончайшими измерительными приборами. На пластической деформации основаны различные способы холодной обработки металлов (штамповка, ковка, прокатка и т. д.).

Остановимся подробнее на законе Гука, описывающем малые упругие деформации в рамках феноменологического подхода. Этот закон справедлив для различных видов упругой деформации: *растяжения* (*сжатия*), *сдвига*, *кручения*, *изгиба*.

Деформация растяжения (сжатия) стержня характеризуется абсолютным удлинением $\Delta l = |l - l_0|$, где l_0 — длина стержня в недеформированном состоянии, и относительным удлинением $\varepsilon = \Delta l / l_0$. Опыт показывает, что удлинение стержня пропорционально вызывающей его силе F:

$$F = k\Delta l. \qquad (1)$$

Коэффициент пропорциональности k в этой формуле называют *жесткостью* стержня. Он зависит как от упругих свойств материала, так и от размеров деформируемого стержня.

Модуль Юнга. Для любых упругих деформаций можно ввести постоянные, характеризующие упругие свойства только материала, не зависящие от размеров тела. Для изотропного тела существуют две независимые характеристики упругих свойств — *модуль Юнга* и *коэффициент Пуассона*. Введем их на примере деформации растяжения.

Рассмотрим однородную деформацию, возникающую в стержне с одинаковым по всей длине поперечным сечением под действием приложенной к его концу силы F. Удлинение Δl, как показывает опыт, пропорционально его первоначальной длине l_0. Поэтому относительное удлинение $\varepsilon = \Delta l / l_0$ уже не зависит от длины стержня. Но эта величина еще зависит от поперечного сечения стержня. Опыт показывает, что удлинение под действием заданной силы обратно пропорционально площади S поперечного сечения стержня. Поэтому если вместо силы F ввести *механическое напряжение* F/S, то при заданном напряжении относительное удлинение уже не зависит от поперечного сечения, т. е. определяется только упругими свойствами материала:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}. \qquad (2)$$

Величина E называется модулем Юнга материала. Из формулы (2) видно, что модуль Юнга равен тому механическому напряжению, при котором относительное удлинение $\Delta l / l_0$ равно единице, если, конечно, считать, что при таких напряжениях деформация остается упругой. В рамках используемого феноменологического подхода значение модуля Юнга определяется на опыте. Например, для стали $E = 22 \cdot 10^{10}$ Н/м^2. Такое напряжение превышает не только *предел упругости*, когда деформация перестает быть упругой, но и *предел прочности*, когда происходит разрушение деформируемого тела.

Задача

Жесткость стержня. Выразите жесткость k упругого стержня через его размеры и модуль Юнга материала.

Решение. Для получения ответа достаточно сопоставить формулу (1), определяющую жесткость стержня k, и формулу (2), выражающую относительное удлинение стержня через механическое напряжение F/S и модуль Юнга E. В результате получим

$$k = \frac{ES}{l_0}.$$

Жесткость стержня пропорциональна площади поперечного сечения, не зависит от формы этого сечения и обратно пропорциональна длине стержня.

△ **Коэффициент Пуассона.** Опыт показывает, что при растяжении стержня уменьшаются его поперечные размеры. Это уменьшение можно характеризовать относительным поперечным сжатием $|\Delta d|/d_0$, где d — поперечный линейный размер стержня (диаметр, толщина и т. п.). Отношение относительного поперечного сжатия стержня к его относительному удлинению при упругой деформации не зависит как от приложенного напряжения, так и от размеров стержня. Оно называется коэффициентом Пуассона. Для многих веществ значение этой безразмерной величины близко к 0,3.

Всестороннее сжатие. При всестороннем (гидростатическом) сжатии тела относительное уменьшение его объема пропорционально вызывающему это сжатие изотропному давлению p:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{k}, \qquad (3)$$

где не зависящий от размеров и формы тела коэффициент k называется *модулем всестороннего сжатия.* Он связан с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона для данного материала соотношением

$$k = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \qquad (4)$$

Задача для самостоятельного решения

Докажите формулу (4), рассматривая малое всестороннее сжатие кубика как суперпозицию одинаковых деформаций одностороннего сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Неоднородная деформация. Аналогично деформации растяжения могут быть рассмотрены и малые упругие деформации других видов. Например, при деформации изгиба балки, лежащей на двух опорах, ее прогиб пропорционален приложенной силе (рис. 101). Коэффициент пропорциональности выражается через модуль Юнга материала балки, поскольку при изгибе нижняя сторона балки испытывает деформацию растяжения, а верхняя — сжатия. Эта деформация неоднородная, так как разные части балки деформированы в разной степени. Элементы, расположенные вдоль штриховой линии (рис. 101), практически совсем не

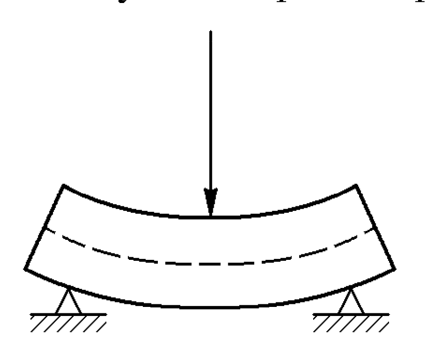


Рис. 101. Изгиб балки, лежащей на двух опорах

деформированы. Благодаря этому обстоятельству коэффициент пропорциональности между прогибом и силой зависит не только от размеров балки, но и от формы ее поперечного сечения. Жесткость двутавровой балки на изгиб оказывается почти такой же, как и у бруска таких же габаритов, хотя масса ее значительно меньше. Такой же принцип использован природой при выборе трубчатого строения костей позвоночных.

Проявления упругих сил. Силы упругости фигурировали в роли сил реакции опоры во всех рассмотренных выше примерах движения при наличии связей. При этом всегда использовалась идеализированная модель упругих тел, в которой жесткость считалась очень большой (строго говоря, бесконечно большой): несмотря на наличие упругих сил реакции, деформация тел считалась настолько малой, что ею можно было пренебречь.

Силы упругости играют важную роль в вопросах механического равновесия, когда в реальных условиях модель недеформируемого твердого тела оказывается недостаточной. Замечательная особенность упругих сил заключается также в том, что они служат наиболее распространенной причиной возникновения механических колебаний. Дело в том, что при упругой деформации возникающие силы всегда стремятся вернуть тело в положение равновесия. Если тело выведено из равновесия и предоставлено самому себе, под действием упругих сил возникает его движение к положению равновесия. Благодаря инерции тело проскакивает это положение, возникает деформация противоположного знака, и весь процесс повторяется.

- Объясните, почему жесткость двутавровой балки на изгиб почти такая же, как у бруска тех же габаритов из такого же материала.
- Какой вид деформации имеет место в материале проволоки, из которой навита пружина школьного динамометра? ▲

§ 25. Механическое состояние. Уравнение движения

При движении материальной точки изменяются со временем ее положение в пространстве, определяемое радиусом-вектором **r**, ее скорость **v**, ускорение **a**. Говорят, что происходит изменение состояния материальной точки со временем. Что же понимают под *механическим состоянием* и какими параметрами оно определяется?

Механическое состояние материальной точки в некоторый момент времени определено, если для этого момента времени заданы ее радиус-вектор и скорость. Если известно механическое состояние материальной точки в какой-либо момент времени и действующие на нее силы, то с помощью второго закона Ньютона можно опреде-

лить ее механическое состояние в последующие моменты времени, т. е. полностью предсказать ее движение. Именно по этой причине второй закон Ньютона часто называют *уравнением движения*, ибо он описывает эволюцию начального состояния механической системы во времени.

Уравнение движения. Остановимся подробнее на вопросе определения механического состояния в произвольный момент времени. Второй закон Ньютона, или уравнение движения $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, позволяет при известных силах найти ускорение материальной точки. Но знание ускорения дает возможность определить только изменение скорости за некоторый промежуток времени. Чтобы найти само значение скорости к концу этого промежутка, нужно знать не только изменение скорости, но и ее значение в начальный момент. Аналогично, знание скорости позволяет найти изменение положения материальной точки за некоторое время. Чтобы найти сам радиус-вектор, нужно знать его значение в начальный момент.

Например, в случае движения под действием постоянной силы, когда ускорение также постоянно, скорость и радиус-вектор материальной точки в момент времени t определяются формулами

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}(t) = \mathrm{r}_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$ — скорость и радиус-вектор в начальный момент времени $t = 0$. Уравнение движения дает возможность найти $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ только тогда, когда известно *начальное состояние* системы, т. е. величины $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$.

Начальные условия. Задание начальных условий для нахождения $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ необходимо и в том случае, когда действующие силы таковы, что ускорение не остается постоянным. При этом в некоторых случаях уравнение движения удается решить (проинтегрировать) аналитически, т. е. найти $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ как функции времени, которые также будут содержать начальные значения $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$. В качестве примеров таких случаев можно указать движение материальной точки под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра силового поля (движение планеты под действием притяжения к Солнцу, движение спутника Земли, движение альфа-частицы в поле атомного ядра), движение под действием силы, пропорциональной смещению от положения равновесия (тело на пружине), и т. д.

Алгоритм численного решения. В случаях, когда уравнение движения не удается решить аналитически, его можно решать *численно*. Действующая на материальную точку сила может зависеть от времени явно, от положения точки и от ее скорости: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Пусть

нам заданы начальные значения $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$. Уравнение движения $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ дает возможность найти ускорение $\mathbf{a}_0$ в тот же момент времени $t = 0$. Зная ускорение, можно приближенно найти изменение скорости за малый промежуток времени Δt:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}_0\Delta t,$$

откуда скорость $\mathbf{v}_1$ к концу этого промежутка равна

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0\Delta t. \qquad (2)$$

Зная скорость $\mathbf{v}_0$ в начальный момент, можно приближенно найти изменение радиуса-вектора за то же время Δt:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0\Delta t.$$

Более точное значение $\Delta\mathbf{r}$ можно получить, если взять вместо $\mathbf{v}_0$ среднее значение скорости на этом промежутке, считая ускорение на нем постоянным:

$$\Delta\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)\Delta t.$$

Отсюда значение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ к концу промежутка времени Δt получится в виде

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\Delta t \quad \text{или} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)\Delta t, \qquad (3)$$

в зависимости от того, какой из приведенных выше формул для $\Delta\mathbf{r}$ отдать предпочтение.

Выбор промежутка времени Δt определяется той точностью, которую мы хотим получить при таком приближенном вычислении. Чем меньше промежуток времени Δt, тем ближе к истинным будут значения $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{r}_1$, вычисляемые по формулам (2) и (3). Найденные значения $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{r}_1$ подставляем в выражение для силы $F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ и с помощью уравнения движения $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ находим ускорение $\mathbf{a}_1$ материальной точки в конце промежутка времени Δt.

Теперь повторяем описанную процедуру для следующего промежутка времени, причем роль начальных условий будут играть найденные по формулам (2) и (3) значения $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_1\Delta t,$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1\Delta t \quad \text{или} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\Delta t. \qquad (4)$$

Затем все повторяется еще раз и т. д. Если требуется найти изменение механического состояния материальной точки за большой промежуток времени, придется разбить этот промежуток на большое число шагов Δt. Чем меньше размер каждого шага, тем точнее будет результат. Но необходимое число шагов при этом увеличива-

ется. За повышение точности результатов приходится платить увеличением объема вычислений.

Практически такие работы удобно выполнять на ЭВМ. При проведении расчетов имеют дело не с векторами, а с числами. Поэтому каждое из приведенных выше векторных уравнений записывается в виде трех скалярных уравнений, соответствующих проекциям векторного уравнения на оси выбранной системы координат.

Системы взаимодействующих тел. Часто приходится рассматривать механическую систему, состоящую из нескольких взаимодействующих тел. Если известны силы взаимодействия между телами и внешние силы, действующие на каждое из тел, то для нахождения движения всех этих тел приходится решать систему уравнений, состоящую из уравнений движения для каждого тела. Механическое состояние системы частиц определяется заданием положений и скоростей всех частиц в один и тот же момент времени. Уравнения движения позволяют найти изменение этого состояния со временем.

Аналитическое решение задачи о механическом движении системы взаимодействующих тел обычно сопряжено с огромными математическими трудностями. Так, например, до сих пор не решена в общем виде задача о движении всего лишь трех взаимодействующих тел при произвольных начальных условиях. Однако численный расчет движения системы взаимодействующих частиц не содержит ничего принципиально нового по сравнению с расчетом движения одной материальной точки. При приближенном вычислении скорость и радиус-вектор каждой из частиц находятся с помощью той же самой процедуры по формулам (2)—(4), только при определении ускорений частиц в каждый момент времени с помощью уравнений движения в этих уравнениях кроме внешних сил учитываются и силы взаимодействия между частицами.

- Какой смысл вкладывается в понятие механического состояния? Какими величинами определяется механическое состояние материальной точки? системы материальных точек?
- Почему ускорение частицы не входит в число величин, определяющих ее механическое состояние?
- Опишите алгоритм численного расчета механического движения материальной точки.
- Какую роль играют начальные условия при решении уравнений движения?

△ **Нахождение сил по движению.** Уравнения движения можно использовать для нахождения действующих сил, если известно, как происходит движение тела, т. е. задан его радиус-вектор как функция времени. Примером такой задачи может служить нахождение силы притяжения планеты к Солнцу по известному из

астрономических наблюдений закону обращения этой планеты по эллиптической орбите вокруг Солнца. Именно так был установлен закон обратных квадратов для силы тяготения.

Другой пример — движение точки по эллипсу, описываемое уравнениями

$$x(t) = A\cos\omega t,\quad y(t) = B\sin\omega t,\quad z(t) = 0. \qquad (5)$$

В том, что траектория такого движения действительно представляет собой эллипс, можно убедиться, исключив время из этих уравнений. Разделив первое из этих уравнений на A, а второе на B, возводя их в квадрат и складывая, получим, учитывая тождество $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, следующую связь между x и y:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \qquad (6)$$

Это уравнение эллипса (рис. 102) с полуосями A и B, которое в частном случае $A = B$ превращается в уравнение окружности.

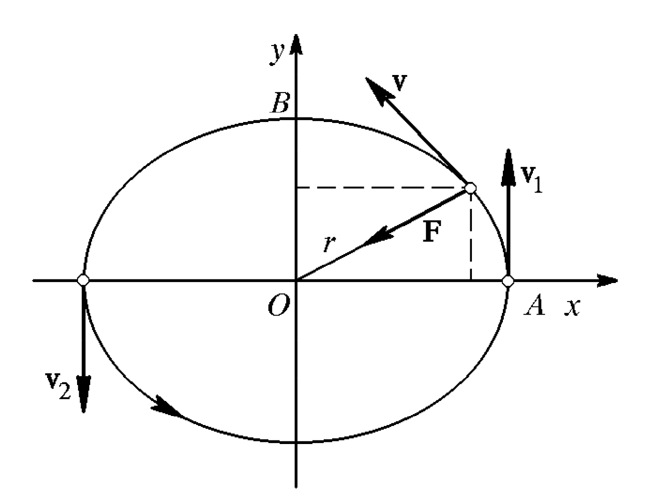


Рис. 102. Движение по эллипсу

Легко убедиться, что материальная точка движется по этому эллипсу в направлении против часовой стрелки, причем так, что ее радиус-вектор поворачивается с постоянной угловой скоростью ω.

Для нахождения силы, вызывающей такое движение, нужно с помощью формул (5) определить ускорение частицы. Дифференцируя уравнения (5) по времени, находим проекции скорости на оси координат:

$$v_x = -A\omega\sin\omega t,\quad v_y = B\omega\cos\omega t,\quad v_z = 0. \qquad (7)$$

Дифференцируя по времени соотношения (7), получаем проекции ускорения:

$$a_x = -A\omega^2\cos\omega t,\quad a_y = -B\omega^2\sin\omega t,\quad a_z = 0. \qquad (8)$$

Используя второй закон Ньютона и уравнения (8), получаем проекции силы, действующей на материальную точку массы m:

$$F_x = -m\omega^2 A \cos \omega t, \qquad F_y = -m\omega^2 B \sin \omega t, \quad F_z = 0 \tag{9}$$

Сравнивая (9) с (5), видим, что выражения для проекций силы можно записать в виде

$$F_x = -m\omega^2 x, \quad F_y = -m\omega^2 y. \tag{10}$$

Эти соотношения дают искомую зависимость действующей на частицу силы от ее координат. В векторном виде их можно записать следующим образом:

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}. \tag{11}$$

Сила $\mathbf{F}$ в каждой точке направлена к началу координат и пропорциональна расстоянию r до находящегося там центра силового поля (см. рис. 102). Такую зависимость силы от положения можно реализовать, например, с помощью двух пар одинаковых пружин (рис. 103). Чтобы движение тела происходило именно по уравнениям (5), начальные условия должны быть вполне определенными: из (5) следует, что при $t = 0$ должно быть $x_0 = A$,

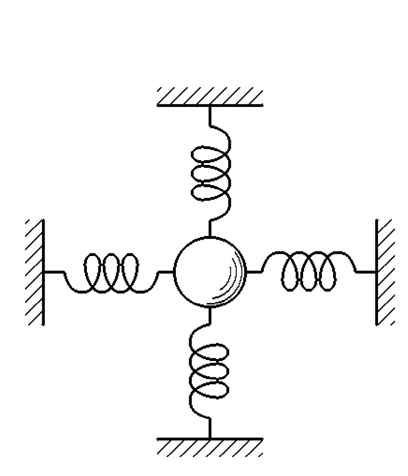


Рис. 103. При смещении шарика из положения равновесия действующая со стороны пружин сила направлена к этому положению равновесия и пропорциональна смещению

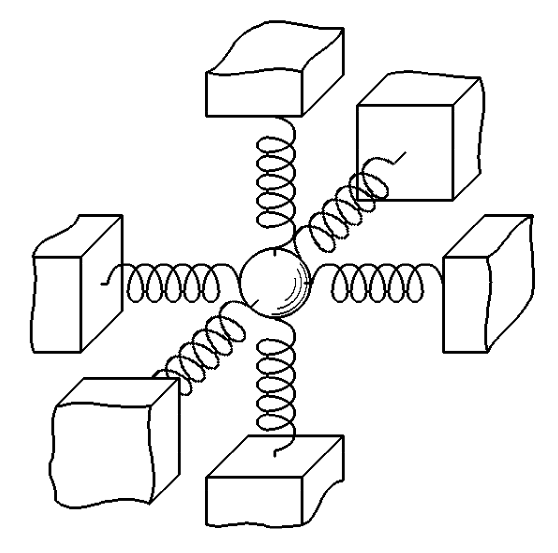


Рис. 104. Изотропный осциллятор (три пары взаимно перпендикулярных пружин)

$y_0 = 0$, $z_0 = 0$, а из уравнений (7) — что $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = B\omega$, $v_{z0} = 0$. Такое начальное состояние можно осуществить, оттянув шарик в направлении оси x на расстояние A и толчком сообщив ему начальную скорость $B\omega$ вдоль оси y. При этом оси x и y направлены вдоль недеформированных взаимно перпендикулярных

пружин, а ось z перпендикулярна плоскости, в которой они расположены.

В действительности оказывается, однако, что взаимно перпендикулярные оси x и y могут быть в плоскости пружин ориентированы произвольным образом. Более того, если к этим двум парам пружин добавить еще такую же пару, расположенную перпендикулярно плоскости, в которой они лежат (рис. 104), то в такой системе выбор направления всех трех осей x, y, z совершенно произволен. По своим механическим свойствам система оказывается *изотропной*. При любых начальных условиях траектория шарика будет плоской. Ориентация этой плоскости определяется векторами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ начального смещения и начальной скорости.

Разные движения по эллипсам. Хотя движение тела под действием силы (11), пропорциональной смещению из положения равновесия, как и движение планет вокруг Солнца, происходит по эллиптической траектории, характер этих движений совершенно различен. Движение планеты происходит под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до Солнца, расположенного в одном из фокусов эллипса (рис. 105), в то время как в рассмотренном выше примере шарика на пружинах силовой центр совпадает с центром эллипса. Различие в характере движений становится особенно отчетливым, если вспомнить, что

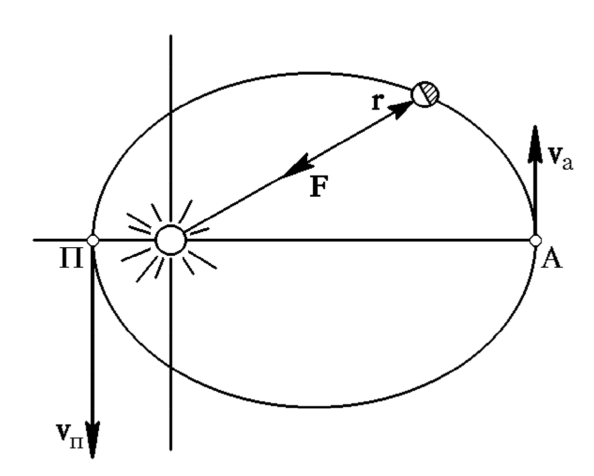


Рис. 105. При движении планеты вокруг Солнца скорость в афелии (А) меньше, чем в перигелии (П)

скорости планеты в афелии и перигелии, т. е. на концах большой полуоси эллипса, различны (рис. 105), в то время как у шарика на пружинах скорости v_1 и v_2 в соответствующих точках орбиты одинаковы (см. рис. 102).

Отметим, что в случае движения при наложенных связях механическое состояние определяется заданием значений обобщенных координат и значений скоростей их изменения (обобщенных

скоростей) в один и тот же момент времени. Таким образом, число параметров, определяющих механическое состояние системы, в два раза больше числа ее степеней свободы. Так, при движении точки по заданной окружности, ее механическое состояние определяется всего двумя величинами, например углом φ и угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi}$.

- Как показать, что радиус-вектор частицы, движение которой описывается уравнениями (5), поворачивается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью?
- Докажите, что формулы (10), связывающие проекции силы с координатами шарика, подвешенного на двух парах одинаковых пружин, справедливы при произвольной ориентации осей x и y в плоскости пружин (т. е. оси не обязательно направлять вдоль пружин).
- Чем различаются движения по эллиптическим траекториям в случаях шарика, подвешенного на трех парах взаимно перпендикулярных одинаковых пружин, и орбитального движения планеты? ▲

§ 26. Принцип относительности Галилея

Основные законы динамики — законы Ньютона — справедливы в инерциальных системах отсчета. Но инерциальных систем много. В какой именно инерциальной системе отсчета рассматривается изучаемое механическое движение — совершенно безразлично. Впервые это обстоятельство было осознано Галилеем.

В своей книге «Диалоги о двух системах мира — птолемеевой и коперниковой», вышедшей в свет в 1632 году, Галилей приводит описание различных механических опытов, производимых в закрытой каюте корабля, из которых следует вывод о том, что все явления происходят одинаково, независимо от того, покоится корабль или движется прямолинейно и равномерно.

Равноправие инерциальных систем. Галилей рассматривал следующие простые опыты. В неподвижном корабле капли воды из подвешенного к потолку ведерка попадают в сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Бросая предмет по направлению к носу корабля, не придется применять большего усилия, чем бросая его на то же расстояние в сторону кормы. Прыгая в длину, вы сделаете прыжок на одно и то же расстояние независимо от его направления. При равномерном движении корабля с какой угодно скоростью в отсутствие качки во всех этих явлениях не удается обнаружить ни малейшего изменения. Например, падающие капли будут по-прежнему попадать в горлышко подставленного сосуда, несмотря на то, что за время падения капли сосуд вместе с кораблем успевает переместиться на значительное расстояние. Ни по одному из этих явлений не удастся установить, движется ли корабль или по-прежнему стоит

на месте. Не помогут тут и самые тонкие механические опыты с точнейшими приборами.

Итак, находясь в закрытой каюте, с помощью механических опытов невозможно определить, стоит ли корабль или движется с постоянной скоростью. Другими словами, механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета в том смысле, что одинаковы описывающие их законы динамики. Поэтому *все инерциальные системы отсчета эквивалентны*, т. е. равноправны.

Это утверждение о механической эквивалентности всех инерциальных систем отсчета в механике и составляет содержание *принципа относительности Галилея*.

Абсолютные и относительные величины. Остановимся на вопросе о равноправии инерциальных систем отсчета несколько подробнее. Вспомним про относительность механического движения, которая проявляется в том, что одно и то же движение с точки зрения разных систем отсчета выглядит по-разному. Траектория мячика, который подбрасывает и ловит находящийся в движущемся вагоне мальчик, представляется ему отрезком прямой линии, в то время как для наблюдателя на платформе станции этот мячик движется по параболе. Утверждая, что движение мячика в любой из этих систем отсчета описывается одними и теми же законами, мы имеем в виду, что уравнение второго закона Ньютона в обеих системах отсчета имеет вид

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \qquad (1)$$

Получающееся из него выражение для скорости мячика имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \qquad (2)$$

а для его радиуса-вектора

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}. \qquad (3)$$

При этом некоторые из входящих в эти формулы величин одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, т. е., как говорят, *абсолютны*. К ним в первую очередь относится время t, что уже обсуждалось в кинематике. Абсолютна и масса m, характеризующая инертные свойства тела. В классической механике абсолютна также и сила F, описывающая взаимодействие тел и поэтому зависящая от их взаимного расположения и, возможно, от их относительной скорости, которые одинаковы в обеих системах. Как мы видели в кинематике, ускорение $\mathbf{a}$ также одинаково во всех системах отсчета, движущихся прямолинейно и равномерно одна относительно другой.

Таким образом, уравнение (1), выражающее основной закон механического движения, удовлетворяет принципу относительности, ибо справедливо во всех инерциальных системах отсчета.

Другие величины, входящие в уравнения (2) и (3), — $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$ — имеют разные значения для одного и того же движения в зависимости от используемой системы отсчета. Законы их преобразования при переходе от одной системы отсчета к другой были рассмотрены в кинематике.

Движение в разных системах отсчета. В рассматриваемом примере с подбрасыванием мячика единственная действующая сила — это сила тяжести $m\mathbf{g}$. Мячик движется с одинаковым ускорением $\mathbf{g}$ в обеих системах отсчета. Но начальная скорость мячика $\mathbf{v}_0$ будет разной. В системе отсчета, связанной с движущимся вагоном, вектор $\mathbf{v}_0$ направлен вертикально вверх. Из (2) при этом следует, что в любой момент времени скорость $\mathbf{v}$ также направлена по вертикали — вверх или вниз, в зависимости от того, на каком участке траектории находится мячик. А из (3) видно, что относительно вагона траектория мячика представляет собой отрезок прямой. Обратим внимание на то, что в этой системе отсчета движение мячика описывается уравнениями, в которые скорость вагона $\mathbf{V}$ вообще не входит. Поэтому мячик будет двигаться одинаково как в неподвижном, так и в равномерно движущемся вагоне.

С точки зрения наблюдателя, стоящего на платформе, начальная скорость подбрасываемого мячика уже не направлена вертикально: она равна векторной сумме вертикальной начальной скорости мячика относительно вагона и горизонтальной скорости вагона. Поэтому в этой системе отсчета начальная скорость мячика направлена под углом к горизонту, и он, естественно, движется по параболе. В зависимости от значения скорости $\mathbf{V}$ вагона это будут разные параболы. Учитывая, что сам мальчик в этой системе отсчета движется горизонтально со скоростью вагона $\mathbf{V}$, нетрудно показать, что, проделав свой путь по параболе, мячик опускается точно в руки мальчика. Докажите это самостоятельно и сравните, насколько проще оказывается математическое описание данного движения в одной системе отсчета по сравнению с другой, несмотря на то, что законы этого движения в обеих системах одинаковы.

Подводя итоги, можно сказать, что в разных инерциальных системах отсчета эволюция начального механического состояния происходит одинаково, по одним и тем же законам. Все различие заключается в виде начального механического состояния рассматриваемой физической системы. Именно различие начальных условий и приводит к тому, что одно и то же явление, описываемое одними и теми же законами, выглядит по-разному в разных инерциальных системах отсчета. В тех же случаях, когда в двух системах отсчета рассматриваются опыты, для которых и начальные условия совпадают, вся картина движения выглядит совершенно одинаково.

Принцип относительности на практике. Принцип относительности Галилея на практике можно использовать для упрощения решения многих физических задач. Удачный выбор одной из множества возможных инерциальных систем отсчета часто позволяет превратить сложную на первый взгляд задачу в почти очевидную. Более того, принцип относительности позволяет иногда получить ответ на вопрос о явлениях, для которых нам неизвестны описывающие их конкретные законы.

Задачи

1. *Движение по ленте транспортера.* Лента горизонтального транспортера движется с постоянной скоростью **V**. На ленту влетает шайба со скоростью **v**, направленной поперек ленты. При какой ширине ленты шайба достигнет ее противоположного края, если коэффициент трения скольжения шайбы по поверхности ленты равен μ? Какова траектория шайбы относительно земли?

Решение. В системе отсчета, связанной с землей, начальная скорость шайбы направлена поперек ленты, но в дальнейшем скорость не остается постоянной ни по модулю, ни по направлению. Поскольку сила сухого трения направлена противоположно скорости, то может показаться, что ускорение шайбы тоже все время меняется. А тогда уже становится совсем непонятно, как подступиться к этой задаче.

Задача становится совершенно очевидной, если перейти в систему отсчета, связанную с равномерно движущейся лентой транспортера. Такая система

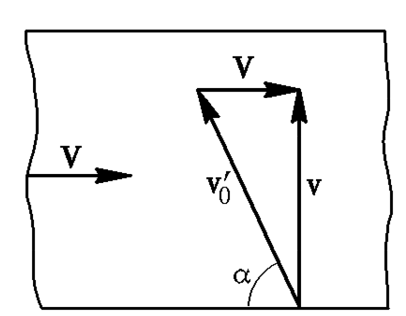


Рис. 106. Скорость v_0 шайбы относительно ленты транспортера направлена под углом α к краю ленты

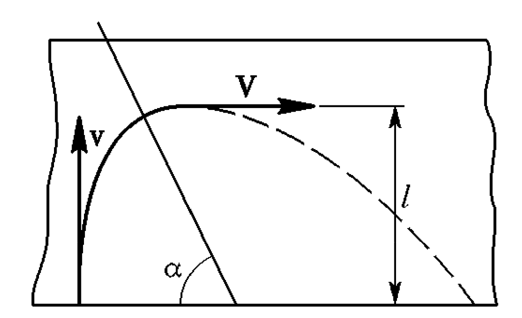


Рис. 107. Траектория шайбы в неподвижной системе отсчета

также является инерциальной. В этой системе отсчета начальная скорость шайбы $\mathbf{v}'_0$ направлена под углом α к краю ленты, тангенс которого равен отношению v/V (рис. 106), а ее модуль

$$v'_0 = \sqrt{V^2 + v^2}.$$

Сила трения постоянна по модулю и по направлению, так как она направлена противоположно скорости $\mathbf{v}'_0$ шайбы относительно ленты. Следовательно, в этой системе отсчета шайба движется прямолинейно с постоянным ускорением, модуль которого равен μg. Очевидно, что пройденный шайбой до остановки (относительно ленты) путь дается выражением

$$s = \frac{v_0'^2}{2\mu g} = \frac{V^2 + v^2}{2\mu g}. \qquad (4)$$

При этом поперек ленты транспортера шайба переместится на расстояние

$$l = s \sin \alpha.$$

Подставляя сюда s из (4) и

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{v}{\sqrt{V^2+v^2}},$$

получаем

$$l = \frac{v\sqrt{V^2+v^2}}{2\mu g}.$$

Если ширина ленты транспортера больше l, то шайба остановится, не достигнув противоположного края ленты.

Какова же будет траектория шайбы относительно земли? Поскольку движение происходит с постоянным ускорением, траектория в системе отсчета, связанной с землей, представляет собой отрезок параболы, ось которой составляет угол α с краем ленты (рис. 107). В начальной точке касательная к параболе направлена поперек ленты, а в точке остановки — вдоль ленты. Так как дальше шайба движется вместе с лентой, относительно земли ее дальнейшая траектория — прямая.

2. *Скорость струйки воды.* Докажите, что скорость истечения воды из отверстия в стенке сосуда, находящегося в вагоне поезда, одинакова независимо от того, стоит поезд на месте или движется равномерно и прямолинейно.

Решение. Для доказательства не требуется умения находить само значение скорости истечения воды. Эта скорость одинакова в обоих рассматриваемых случаях вследствие принципа относительности. Действительно, измеряя эту скорость в неподвижном и в движущемся равномерно и прямолинейно вагоне, мы получим одинаковые значения. Иначе этот опыт позволял бы обнаружить факт равномерного движения поезда, не выглядывая в окно. Однако вследствие принципа относительности это невозможно. Подобные опыты дают возможность обнаружить ускорение вагона, но не его скорость.

Заметим, что скорость истечения одинакова, если в обоих случаях она измеряется в системе отсчета, связанной с вагоном. Скорость истечения воды относительно земли зависит, разумеется, от скорости вагона.

- В чем заключается физическое содержание принципа относительности Галилея?
- Приведите известные вам примеры явлений, подтверждающих принцип относительности.
- Что конкретно имеют в виду, когда говорят, что механические явления описываются одними и теми же законами во всех инерциальных системах отсчета? Ведь для разных наблюдателей одно и то же явление может выглядеть по-разному.
- Почему, находясь в закрытом купе поезда и не выглядывая в окно, можно обнаружить ускорение вагона, но не его скорость?

§ 27. Системы единиц

Любое *измерение* заключается в сравнении измеряемой величины с другой, однородной с ней величиной, принятой за единицу. В принципе единицы для всех физических величин можно выбрать совершенно независимо друг от друга. Однако это практически неудобно, так как тогда во всех уравнениях физических законов, выражающих связь между различными величинами, появятся числовые коэффициенты. Кроме того, пришлось бы для каждой физической величины вводить свой эталон.

Эталон. *Эталоном* называется средство измерений, обеспечивающее воспроизведение и хранение выбранной единицы физической величины, а также передачу размера единицы другим средствам измерений (т. е. вторичным эталонам и измерительным приборам).

Соотношения между единицами. Основной особенностью современных *систем единиц* является то, что между единицами различных величин имеются определенные соотношения. Эти соотношения устанавливаются теми физическими законами или определениями, которыми связаны между собой измеряемые величины. Например, единицу скорости выбирают так, что она выражается через единицы длины и времени. При таком выборе единицы скорости используют *определение* скорости. Единицу силы устанавливают с использованием *физического закона* — второго закона Ньютона — и выражают через единицы ускорения и массы.

Это означает, что при построении определенной системы единиц для нескольких произвольно выбираемых физических величин единицы устанавливают независимо друг от друга и называют *основными*. Единицы для остальных величин выражают через основные и называют *производными*.

Основные и производные единицы. Число основных единиц и сам их выбор в разных системах единиц могут быть различными. В системе единиц СГС (от первых букв наименований основных единиц — Сантиметр, Грамм, Секунда) в качестве основных выбраны три единицы — длины (L), массы (M) и времени (T). В Международной системе единиц СИ (SI — System International) в качестве основных выбраны семь единиц: длины (L), массы (M), времени (T), температуры (θ), количества вещества (N), силы электрического тока (I) и силы света (J).

Кроме произвола в выборе физических величин, единицы которых принимаются за основные, и произвола в выборе масштаба (размера) этих единиц имеется еще произвол в выборе коэффициентов пропорциональности в формулах, которыми вводятся производные единицы.

Единицы площади. Проиллюстрируем это на примере единицы площади. Выбрав в качестве единицы длины метр, можно в качестве единицы площади выбрать либо *квадратный метр* — площадь квадрата, сторона которого равна 1 метру, либо *круглый метр* — площадь круга, диаметр которого равен 1 метру. В первом случае площадь $S_{кв}$ квадрата со стороной l выражается формулой $S_{кв} = l^2$, а площадь $S_{кр}$ круга диаметром d — формулой $S_{кр} = \pi d^2/4$. Во втором случае более простая формула получается для площади круга: $S_{кр} = d^2$, в то время как формула для площади квадрата будет содержать π: $S_{кв} = 4l^2/\pi$.

Рассмотренные возможности введения производных единиц площади, отличающихся числовым коэффициентом, основывались на одной и той же геометрической закономерности, связывающей площади подобных фигур с их линейными размерами: $S \sim l^2$. Но при введении производной единицы какой-либо физической величины кроме упомянутого произвола в выборе числового коэффициента имеется еще произвол в выборе физического закона, с помощью которого устанавливается связь производных единиц с основными. Например, единица силы обычно устанавливается с помощью второго закона Ньютона $F = ma$. В этом случае за единицу силы принимается сила, которая единичной массе сообщает единичное ускорение. Выражение единицы силы через основные единицы, т. е. *размерность* силы, имеет вид

$$\dim F = [F] = MLT^{-2}. \tag{1}$$

Размерность физической величины. Однако при тех же основных единицах (L, M, T) для установления единицы силы можно вместо второго закона Ньютона использовать закон всемирного тяготения, полагая в нем коэффициент пропорциональности безразмерным и равным, например, единице: $F = m_1 m_2/r^2$. В этом случае за единицу силы принимается сила, с которой притягиваются единичные точечные массы, находящиеся на единичном расстоянии одна от другой. Размерность силы при этом имеет вид $\dim F = M^2L^{-2}$. При таком выборе единицы силы во втором законе Ньютона, разумеется, появился бы размерный коэффициент, подобно тому как при обычном выборе единицы силы (на основе второго закона Ньютона) размерный коэффициент появляется в законе всемирного тяготения (гравитационная постоянная).

Разобранный пример показывает, что *размерность физической величины* зависит от *способа построения* системы единиц.

Таким образом, при выборе способа построения системы единиц существует большой произвол. Однако на практике приходится считаться с целым рядом требований, которые существенно ограничивают этот произвол. Слишком большое число основных единиц было

бы неудобно из-за появления размерных коэффициентов во многих физических формулах и из-за необходимости установления большого числа эталонов. Слишком малое число основных единиц приводит к тому, что некоторые построенные на их основе производные единицы оказываются неудобными для использования. Практически используется несколько систем, в которых число основных единиц колеблется от трех до семи.

Эталоны времени и длины. При установлении основных единиц весьма важной является возможность создания таких эталонов, которые обеспечивали бы постоянство единицы и возможность ее воспроизведения, а также восстановление эталона в случае его утраты. Самый надежный способ решения этой задачи — поручить «хранение» эталонов самой природе. Так, принятый в настоящее время *эталон времени* основывается на периоде колебаний, происходящих в атоме изотопа цезия-133 при его переходе между двумя определенными энергетическими подуровнями основного состояния. По *определению* единица времени — секунда — содержит 9 192 631 770 периодов таких колебаний. Такое странное на первый взгляд число периодов в современном определении единицы времени связано с необходимостью обеспечить преемственность со старым эталоном секунды, основанном на суточном вращении Земли.

При современном выборе эталона времени природа предоставляет в наше распоряжение практически неограниченное число совершенно идентичных «часов», поскольку атомы одного и того же изотопа тождественны, неразличимы.

Для установления основной единицы длины в настоящее время используется тот же самый эталон: *по определению* метр — это длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299 792 458 секунды. Возможность использования единого эталона для времени и длины обусловлена тем, что согласно теории относительности скорость света в вакууме представляет собой универсальную мировую постоянную.

До недавнего времени за эталон метра принималось расстояние, содержащее 1 650 763,73 длин волн излучения оранжевой спектральной линии изотопа криптона-86. Отказ от этого эталона связан с тем, что современные методы позволяют выполнить измерение расстояний на основе цезиевого эталона времени с большей точностью.

Эталон массы. Для *эталона массы*, который был бы пригоден для макроскопических тел, пока не удается использовать массу покоя какой-либо атомной частицы, так как точность определения числа атомов в макроскопическом теле уступает точности, с которой можно выполнить сравнение масс макроскопических тел взвешиванием. Поэтому в качестве эталона массы служит определенное макроскопическое тело — платино-иридиевая гиря (ки-

лограмм), хранящаяся в Международном бюро мер и весов в Севре под Парижем, где хранится и первый эталон метра в виде металлического стержня, расстояние между двумя точками на котором (метр) составляет одну десятимиллионную часть длины четверти земного меридиана.

Сложившаяся в учебной и научной литературе ситуация, когда наряду с Международной системой единиц СИ широко используется гауссова система (или симметричная система СГС), требует понимания принципов построения каждой из них. Однако единицы механических величин в этих двух системах отличаются только масштабом, так как основные единицы в них выбраны на базе одних и тех же физических величин — длины, массы, времени, а производные единицы вводятся с помощью одних и тех же соотношений. Поэтому все формулы и уравнения, выражающие физические законы и определения, в механике одинаковы в обеих системах единиц.

- Какова размерность следующих физических величин: скорости, ускорения, силы, единицы измерения которых являются производными?
- Найдите соотношение между единицами длины, массы, времени, скорости, ускорения в системах СГС и СИ.
- За единицу силы в системе СГС принята дина — сила, сообщающая массе 1 г ускорение 1 см/с^2. Выразите дину в ньютонах.
- Чем объясняется то обстоятельство, что размерность одной и той же физической величины может быть разной в разных системах единиц?
- С чем связано столь странное значение 1/299 792 458 доли секунды в определении метра как пути, проходимого светом в вакууме за это время?
- Какие требования предъявляются к эталонам физических величин?

§ 28. Метод анализа размерностей

Физические величины, числовое значение которых не зависит от выбранного масштаба единиц, называются *безразмерными*. Примеры безразмерных величин — угол (отношение длины дуги к радиусу), показатель преломления вещества (отношение скорости света в вакууме к скорости света в веществе).

Физические величины, изменяющие свое числовое значение при изменении масштаба единиц, называются *размерными*. Примеры размерных величин — длина, сила и т. д. Выражение единицы физической величины через основные единицы называется ее размерностью (или *формулой размерности*). Например, размерность силы в системах СГС и СИ выражается формулой

$$\dim F = MLT^{-2}. \qquad (1)$$

Соображения размерности можно использовать для проверки правильности полученных ответов при решении физических задач: правые и левые части полученных выражений, как и отдельные слагаемые в каждой из частей, должны иметь одинаковую размерность.

Метод размерностей можно использовать и для вывода формул и уравнений, когда нам известно, от каких физических параметров может зависеть искомая величина. Сущность метода легче всего уяснить на конкретных примерах.

Применения метода размерностей. Рассмотрим задачу, ответ для которой нам хорошо известен: с какой скоростью упадет на землю тело, свободно падающее без начальной скорости с высоты h, если сопротивлением воздуха можно пренебречь? Вместо непосредственного вычисления на основе законов движения будем рассуждать следующим образом.

Подумаем, от чего вообще может зависеть искомая скорость. Очевидно, что она должна зависеть от начальной высоты h и от ускорения свободного падения g. Можно предположить, следуя Аристотелю, что она зависит и от массы m. Поскольку складывать можно только величины одинаковой размерности, то для искомой скорости v можно предложить такую формулу:

$$v = Ch^x g^y m^z, \tag{2}$$

где C — некоторая безразмерная постоянная (числовой коэффициент), а x, y и z — неизвестные числа, которые следует определить.

Размерность правой и левой частей этого равенства должна быть одинакова, и именно этим условием можно воспользоваться для определения показателей степени x, y, z в (2). Размерность скорости v есть LT^{-1}, размерность высоты h есть L, размерность ускорения свободного падения g равна LT^{-2}, и, наконец, размерность массы m равна M. Поскольку постоянная C безразмерна, то формуле (2) соответствует следующее равенство размерностей:

$$LT^{-1} = L^x (LT^{-2})^y M^z. \tag{3}$$

Это равенство должно выполняться независимо от того, каковы числовые значения h, g и m. Поэтому следует приравнять показатели степеней при L, T и M в левой и правой частях равенства (3):

$$L{:}\ 1 = x + y, \quad T{:}\ -1 = -2y, \quad M{:}\ 0 = z. \tag{4}$$

Из этой системы уравнений получаем $z = 0$, $y = 1/2$, $x = 1/2$. Поэтому формула (2) принимает вид

$$v = Ch^{1/2} g^{1/2} m^0 = C\sqrt{gh}.$$

Истинное значение скорости, как известно, равно $\sqrt{2gh}$, т. е. $C = \sqrt{2}$.

Итак, использованный подход позволил определить правильно зависимость v от h, g и m и не дал возможности найти значение

безразмерной постоянной C. Хотя нам и не удалось получить исчерпывающего ответа, все же получена весьма существенная информация. Например, мы можем с полной определенностью утверждать, что, если начальную высоту h увеличить в четыре раза, скорость в момент падения возрастет вдвое и что вопреки мнению Аристотеля эта скорость не зависит от массы падающего тела.

Выбор параметров. При использовании метода размерностей следует в первую очередь выявить параметры, определяющие рассматриваемое явление. Это легко сделать, если известны описывающие его физические законы. В ряде случаев определяющие явление параметры можно указать и тогда, когда физические законы неизвестны. Как правило, для использования метода анализа размерностей нужно знать меньше, чем для составления уравнений движения.

Если число параметров, определяющих изучаемое явление, больше числа основных единиц, на которых построена выбранная система единиц, то, разумеется, все показатели степеней в предлагаемой формуле для искомой величины не могут быть определены. В этом случае полезно прежде всего определить все независимые безразмерные комбинации из выбранных параметров. Тогда искомая физическая величина будет определяться не формулой типа (2), а произведением какой-либо (самой простой) комбинации параметров, имеющей нужную размерность (т. е. размерность искомой величины), на некоторую функцию найденных безразмерных параметров.

Легко видеть, что в разобранном выше примере падения тела с высоты h из величин h, g и m безразмерную комбинацию составить нельзя. Поэтому там формула (2) исчерпывает все возможные случаи.

Безразмерный параметр. Рассмотрим теперь такую задачу: определим дальность горизонтального полета снаряда, выпущенного в горизонтальном направлении с начальной скоростью v из орудия, находящегося на горе высоты h.

В отсутствие сопротивления воздуха число параметров, от которых может зависеть искомая дальность, равно четырем: h, v, g и m. Поскольку число основных единиц равно трем, то полное решение задачи методом размерностей невозможно. Найдем прежде всего все независимые безразмерные параметры γ, которые можно составить из h, v, g и m:

$$\gamma = h^x v^y g^z m^u.$$

Этому выражению соответствует следующее равенство размерностей:

$$1 = L^x (LT^{-1})^y (LT^{-2})^z M^u.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$L\colon\ 0 = x + y + z,\quad T\colon\ 0 = -y - 2z,\quad M\colon\ 0 = u,$$

которая дает $u = 0$, $y = -2z$, $x = z$, и для искомого безразмерного параметра получаем

$$\gamma = h^z v^{-2z} g^z m^0 = \left(\frac{hg}{v^2}\right)^z .$$

Видно, что единственный независимый безразмерный параметр в рассматриваемой задаче — это v^2/gh. Теперь достаточно найти какой-либо параметр, имеющий размерность длины, например взять сам параметр h, для того чтобы написать общее выражение для дальности s полета снаряда по горизонтали в виде

$$s = hf\left(\frac{v^2}{gh}\right), \qquad (5)$$

где f — пока неизвестная функция безразмерного параметра v^2/gh. Метод размерностей (в изложенном варианте) не позволяет определить эту функцию. Но если нам откуда-нибудь, например из опыта, известно, что искомая дальность пропорциональна горизонтальной скорости снаряда, то вид функции f немедленно определяется: скорость v должна входить в нее в первой степени, т. е.

$$f\left(\frac{v^2}{gh}\right) = C\,\frac{v}{\sqrt{gh}}. \qquad (6)$$

Теперь из (5) для дальности s полета снаряда получаем

$$s = C\,\frac{hv}{\sqrt{gh}} = Cv\sqrt{\frac{h}{g}}, \qquad (7)$$

что при $C = \sqrt{2}$ совпадает с правильным ответом

$$s = v\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Подчеркнем, что при таком способе определения вида функции f нам достаточно знать характер экспериментально установленной зависимости дальности полета не от всех параметров, а только от какого-нибудь одного из них.

Векторные единицы длины. Но можно определить дальность (7) только из соображений размерности, если увеличить до четырех число основных единиц, через которые выражаются параметры h, v, g и m. До сих пор при записи формул размерностей не делалось различий между единицами длины в горизонтальном и вертикальном направлении. Однако такое различие можно ввести, основываясь на том, что сила тяжести действует только по вертикали.

Обозначим размерность длины в горизонтальном направлении через $L_г$, а по вертикали — через $L_в$. Тогда размерность дальности s полета по горизонтали будет $L_г$, размерность высоты h будет $L_в$, размерность горизонтальной скорости v будет $L_г T^{-1}$, а для ускорения свобод-

ного падения g получим $L_{\text{в}}T^{-2}$. Теперь, глядя на формулу (5), мы видим, что единственный способ получить правильную размерность $L_{\text{г}}$ в правой части заключается в том, чтобы считать $f(v^2/gh)$ пропорциональной v. Мы снова приходим к формуле (7).

Разумеется, имея четыре основные единицы $L_{\text{г}}$, $L_{\text{в}}$, T и M, можно и непосредственно сконструировать величину нужной размерности из четырех параметров h, v, g и m:

$$s = Ch^x v^y g^z m^u.$$

Равенство размерностей левой и правой частей имеет вид

$$L_{\text{г}} = L_{\text{в}}^x (L_{\text{г}}T^{-1})^y (L_{\text{в}}T^{-2})^z M^u. \quad (8)$$

Система уравнений для x, y, z и u дает значения $u = 0$, $y = 1$, $z = -1/2$, $x = 1/2$, и мы опять приходим к формуле (7).

Используемые здесь разные единицы длины по взаимно перпендикулярным направлениям иногда называют *векторными единицами длины*. Их применение существенно расширяет возможности метода анализа размерностей.

При использовании метода анализа размерностей полезно развить навыки до такой степени, чтобы не составлять систему уравнений для показателей степеней в искомой формуле, а подбирать их непосредственно. Проиллюстрируем это на следующей задаче.

Задача

Максимальная дальность. Под каким углом к горизонту следует бросить камень, чтобы дальность полета по горизонтали была максимальной?

Решение. Допустим, что мы «забыли» все формулы кинематики, и попытаемся получить ответ из соображений размерности. На первый взгляд может показаться, что метод размерностей здесь вообще неприменим, так как в ответ должна войти какая-то тригонометрическая функция угла бросания. Поэтому вместо самого угла α попробуем искать выражение для дальности s. Ясно, что без векторных единиц длины здесь не обойтись.

Выпишем параметры, от которых может зависеть дальность s. Очевидно, это горизонтальная составляющая начальной скорости $v_{\text{г}}$, размерность которой $L_{\text{г}}T^{-1}$, вертикальная составляющая $v_{\text{в}}$ с размерностью $L_{\text{в}}T^{-1}$, ускорение свободного падения $g(L_{\text{в}}T^{-2})$ и, возможно, масса m с размерностью M. Размерность искомой дальности s — это $L_{\text{г}}$, поэтому сразу ясно, что масса m в ответ входить не может, так как M отсутствует в размерности всех остальных параметров и ей не с чем сократиться. Далее сразу очевидно, что скорость $v_{\text{г}}$ должна входить в ответ в первой степени, так как $L_{\text{г}}$ отсутствует в размерностях всех параметров, кроме $v_{\text{г}}$. Но теперь в размерности правой части появилось время, которое можно сократить только введением в формулу или $v_{\text{в}}$, или g, или их комбинации. Ясно, что это должна быть непременно комбинация $v_{\text{в}}/g$, так как необходимо, чтобы сократилась размерность $L_{\text{в}}$. Размерность комбинации $v_{\text{в}}/g$ — это

T. Поэтому, учитывая, что в $v_г$ время входит в минус первой степени, приходим к формуле

$$s = C\,\frac{v_г v_в}{g}.$$

Поскольку $v_г = v_0 \cos \alpha$, $v_в = v_0 \sin \alpha$, получаем следующую зависимость дальности s от угла α:

$$s = C\,\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = C\,\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Видно, что максимальная дальность при заданном значении v_0 получается при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = \pi/4$.

Метод размерностей особенно полезен тогда, когда требуется получить не исчерпывающее решение, а только установить характер зависимости неизвестной величины от какого-либо из параметров, например выяснить, во сколько раз она изменится, если этот параметр изменить, скажем, вдвое.

Анализ размерностей является очень эффективным методом исследования физических явлений и широко применяется. Великий физик Энрико Ферми утверждал, что действительно понимающие природу того или иного явления должны уметь получать основные соотношения из соображений размерности.

- Что такое формула размерности?
- В чем заключается удобство использования безразмерных комбинаций параметров, характеризующих рассматриваемое явление?
- Почему может оказаться полезным увеличение числа основных единиц, например введение векторных единиц длины?
- Составьте и решите систему уравнений, соответствующую равенству размерностей (8), или подберите искомые показатели степеней непосредственно.

III. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Законы динамики дают возможность полностью описать механическое поведение изучаемой системы, если известны силы, действующие на образующие эту систему материальные точки. Применение второго закона Ньютона к каждой из материальных точек позволяет найти ее ускорение в данном месте в данный момент времени и тем самым последовательно, шаг за шагом, проследить ее движение.

Но часто такая детальная информация о движении бывает не нужна. Иногда нас интересует только конечное состояние изучаемой системы, а ее промежуточные состояния, через которые система проходит в конечное состояние, не представляют интереса. В некоторых случаях нас вообще интересует только движение системы как целого, а не движение отдельных частиц, входящих в систему. В подобных случаях быстрее всего к цели приводит не непосредственное применение законов Ньютона, а использование законов сохранения.

Физический мир устроен так, что при происходящих в нем изменениях — механическом движении, явлениях теплопередачи, прохождении электрического тока, распространении электромагнитных волн, превращениях атомов, ядер и элементарных частиц — некоторые физические характеристики рассматриваемых систем остаются неизменными. К таким сохраняющимся величинам, прежде всего, относятся импульс, момент импульса, энергия, электрический заряд. Самое замечательное в законах сохранения заключается в том, что одна и та же сохраняющаяся физическая величина, например энергия, фигурирует в явлениях разной физической природы, которые изучаются в разных разделах физики — механике, электродинамике, квантовой физике. Использование законов сохранения позволяет взглянуть на изучаемые явления с более общих позиций и часто дает возможность найти ответы на некоторые вопросы, касающиеся тех явлений, для которых нам неизвестны описывающие их конкретные законы, например на вопросы о взаимодействиях и взаимных превращениях элементарных частиц.

Справедливость фундаментальных законов сохранения, охватывающих все явления природы, подтверждается опытным путем. Однако для определенного круга явлений, относящихся к какому-либо одному разделу физики, законы сохранения могут быть получены из конкретных законов этого раздела. Так, для механических явле-

ний существование законов сохранения импульса, момента импульса и энергии вытекает из законов динамики, т. е. они могут быть получены как прямое следствие законов Ньютона.

§ 29. Импульс. Импульс силы

Импульс — это одна из самых фундаментальных характеристик физической системы. Импульс замкнутой системы сохраняется при любых происходящих в ней процессах.

Знакомство с этой величиной начнем с простейшего случая. *Импульсом* $\mathbf{p}$ *материальной точки* массы m, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, называется произведение $m\mathbf{v}$:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{1}$$

Закон изменения импульса. Из этого определения можно с помощью второго закона Ньютона найти *закон изменения импульса* частицы в результате действия на нее некоторой силы $\mathbf{F}$. Изменяя скорость частицы, сила изменяет и ее импульс: $\Delta\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v}$. В случае постоянной действующей силы $m\Delta\mathbf{v}/\Delta t = \mathbf{F}$, поэтому

$$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{F}. \tag{2}$$

Скорость изменения импульса материальной точки равна равнодействующей всех действующих на нее сил. При постоянной силе $\mathbf{F}$ промежуток времени Δt в (2) может быть взят любым. Поэтому для изменения импульса частицы за этот промежуток справедливо

$$\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{F}\,\Delta t. \tag{3}$$

В случае изменяющейся со временем силы $\mathbf{F}$ весь промежуток времени Δt следует разбить на малые промежутки Δt_i, в течение каждого из которых силу $\mathbf{F}$ можно считать постоянной. Изменение импульса частицы $\Delta\mathbf{p}_i$ за отдельный промежуток Δt_i вычисляется по формуле (3):

$$\Delta\mathbf{p}_i = \mathbf{F}_i\,\Delta t_i.$$

Полное изменение импульса за весь рассматриваемый промежуток времени равно векторной сумме изменений импульса $\Delta\mathbf{p}_i$ за все промежутки Δt_i:

$$\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \sum_i \Delta\mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{F}_i\,\Delta t_i.$$

Если воспользоваться понятием производной, то вместо (2), очевидно, закон изменения импульса частицы записывается как

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{4}$$

Импульс силы. Изменение импульса за конечный промежуток времени от 0 до t выражается интегралом

$$\Delta \mathbf{p} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \int_0^t \mathbf{F}(t)\, dt. \tag{5}$$

Величина, стоящая в правой части (3) или (5), называется *импульсом силы*. Таким образом, изменение импульса $\Delta \mathbf{p}$ материальной точки за промежуток времени Δt равно импульсу силы, действовавшей на него в течение этого промежутка времени.

Равенства (2) и (4) представляют собой в сущности другую формулировку второго закона Ньютона. Именно в таком виде этот закон и был сформулирован самим Ньютоном.

Физический смысл понятия импульса тесно связан с имеющимся у каждого из нас интуитивным или почерпнутым из повседневного опыта представлением о том, легко ли остановить движущееся тело. Значение здесь имеют не скорость или масса останавливаемого тела, а то и другое вместе, т. е. именно его импульс.

Импульс системы. Понятие импульса становится особенно содержательным, когда оно применяется к системе взаимодействующих материальных точек. *Полным импульсом* $\mathbf{P}$ *системы частиц* называется векторная сумма импульсов отдельных частиц в один и тот же момент времени:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i. \tag{6}$$

Здесь суммирование выполняется по всем входящим в систему частицам, так что число слагаемых равно числу N частиц системы.

Внутренние и внешние силы. К закону сохранения импульса системы взаимодействующих частиц легко прийти непосредственно из второго и третьего законов Ньютона. Силы, действующие на каждую из N входящих в систему частиц, разобьем на две группы: *внутренние* и *внешние*. Внутренняя сила $\mathbf{F}_{ik}$ — это сила, с которой k-я частица действует на i-ю. Внешняя сила $\mathbf{F}_i$ — это сила, с которой действуют на i-ю частицу все тела, не входящие в состав рассматриваемой системы.

Закон изменения импульса i-й частицы в соответствии с (2) или (4) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{F}_{ik} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{7}$$

Сложим почленно уравнения (7) для всех частиц системы. Тогда в левой части, как следует из (6), получим скорость изменения пол-

ного импульса системы $d\mathbf{P}/dt$. Поскольку внутренние силы $\mathbf{F}_{ik}$ взаимодействия между частицами удовлетворяют третьему закону Ньютона:

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}, \tag{8}$$

то при сложении уравнений (7) в правой части, где внутренние силы встречаются только парами $\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki}$, их сумма обратится в нуль. В результате получим

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i. \tag{9}$$

Скорость изменения полного импульса равна сумме внешних сил, действующих на все частицы.

Обратим внимание на то, что равенство (9) имеет такой же вид, как и закон изменения импульса одной материальной точки, причем в правую часть входят только внешние силы. В замкнутой системе, где внешние силы отсутствуют, полный импульс **P** системы не изменяется независимо от того, какие внутренние силы действуют между частицами.

Полный импульс не меняется и в том случае, когда действующие на систему внешние силы в сумме равны нулю. Может оказаться, что сумма внешних сил равна нулю только вдоль какого-то направления. Хотя физическая система в этом случае и не является замкнутой, составляющая полного импульса вдоль этого направления, как следует из формулы (9), остается неизменной.

Уравнение (9) характеризует систему материальных точек в целом, но относится к определенному моменту времени. Из него легко получить закон изменения импульса системы за конечный промежуток времени Δt. Если действующие внешние силы неизменны в течение этого промежутка, то из (9) следует

$$\Delta\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{F}_i\,\Delta t. \tag{10}$$

Если внешние силы изменяются со временем, то в правой части (10) будет стоять сумма интегралов по времени от каждой из внешних сил:

$$\Delta\mathbf{P} = \sum_i \int_0^t \mathbf{F}_i\,dt.$$

Таким образом, изменение полного импульса системы взаимодействующих частиц за некоторый промежуток времени равно векторной сумме импульсов внешних сил за этот промежуток.

Сравнение с динамическим подходом. Сравним подходы к решению механических задач на основе уравнений динамики и на основе закона сохранения импульса на следующем простом примере. Спу-

щенный с сортировочной горки железнодорожный вагон массы m_1, движущийся с постоянной скоростью v_0, сталкивается с неподвижным вагоном массы m_2 и сцепляется с ним. С какой скоростью движутся сцепленные вагоны?

Нам ничего не известно о силах, с которыми взаимодействуют вагоны во время столкновения, кроме того факта, что на основании третьего закона Ньютона они в каждый момент равны по модулю и противоположны по направлению. При динамическом подходе необходимо задаваться какой-то моделью взаимодействия вагонов. Простейшее возможное предположение — что силы взаимодействия постоянны в течение всего времени, пока происходит сцепка. В таком случае с помощью второго закона Ньютона для скоростей v_1 и v_2 каждого из вагонов спустя время t после начала сцепки можно написать

$$v_1 = v_0 - \frac{F}{m_1}t, \quad v_2 = \frac{F}{m_2}t. \tag{11}$$

Очевидно, что процесс сцепки заканчивается, когда скорости вагонов становятся одинаковыми. Предположив, что это произойдет спустя время τ, имеем

$$v_0 - \frac{F}{m_1}\tau = \frac{F}{m_2}\tau.$$

Отсюда можно выразить импульс силы $F\tau$:

$$F\tau = v_0 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя это значение $F\tau$ в любую из формул (11), например во вторую, находим выражение для конечной скорости v вагонов:

$$v = \frac{F\tau}{m} = v_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Конечно, сделанное предположение о постоянстве силы взаимодействия вагонов в процессе их сцепки весьма искусственно. Использование более реалистичных моделей приводит к более громоздким расчетам. Однако в действительности результат для конечной скорости вагонов не зависит от картины взаимодействия (разумеется, при условии, что в конце процесса вагоны сцепились и движутся с одной и той же скоростью). Проще всего в этом убедиться, используя закон сохранения импульса.

Поскольку никакие внешние силы в горизонтальном направлении на вагоны не действуют, полный импульс системы остается неизменным. До столкновения он равен импульсу первого вагона $m_1 v_0$. После сцепки импульс вагонов равен $(m_1 + m_2)v$. Приравнивая эти значения, сразу находим

$$v = v_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

что, естественно, совпадает с ответом, полученным на основе динамического подхода. Использование закона сохранения импульса позволило найти ответ на поставленный вопрос с помощью менее громоздких математических выкладок, причем этот ответ обладает большей общностью, так как при его получении не использовалась какая бы то ни было конкретная модель взаимодействия.

Проиллюстрируем применение закона сохранения импульса системы на примере более сложной задачи, где уже выбор модели для динамического решения затруднителен.

Задача

Разрыв снаряда. Снаряд разрывается в верхней точке траектории, находящейся на высоте h над поверхностью земли, на два одинаковых осколка. Один из них падает на землю точно под точкой разрыва спустя время t_1. Во сколько раз изменится расстояние от этой точки по горизонтали, на которое улетит второй осколок, по сравнению с расстоянием, на котором упал бы неразорвавшийся снаряд?

Решение. Прежде всего напишем выражение для расстояния s, на которое улетел бы неразорвавшийся снаряд. Так как скорость снаряда в верхней точке (обозначим ее через v) направлена горизонтально, то расстояние s равно произведению v на время t падения с высоты h без начальной скорости, равное $\sqrt{2h/g}$, на которое улетел бы неразорвавшийся снаряд. Так как скорость снаряда в верхней точке (обозначим ее через v) направлена горизонтально, то расстояние s равно произведению v на время t падения с высоты h без начальной скорости, равное $\sqrt{2h/g}$ тела, рассматриваемого как система материальных точек:

$$s = vt = v\sqrt{2h/g}. \tag{12}$$

Разрыв снаряда на осколки происходит почти мгновенно, т. е. разрывающие его внутренние силы действуют в течение очень короткого промежутка времени. Очевидно, что изменением скорости осколков под действием силы тяжести за столь короткий промежуток времени можно пренебречь по сравнению с изменением их скорости под действием этих внутренних сил. Поэтому, хотя рассматриваемая система, строго говоря, не является замкнутой, можно считать, что ее полный импульс при разрыве снаряда остается неизменным.

Из закона сохранения импульса можно сразу выявить некоторые особенности движения осколков. Импульс — векторная величина. До разрыва он лежал в плоскости траектории снаряда. Поскольку, как сказано в условии, скорость одного из осколков вертикальна, т. е. его импульс остался в той же плоскости, то и импульс второго осколка также лежит в этой плоскости. Значит, и траектория второго осколка останется в той же плоскости.

Далее из закона сохранения горизонтальной составляющей полного импульса следует, что горизонтальная составляющая скорости второго осколка равна $2v$, ибо его масса равна половине массы снаряда, а горизонтальная составляющая импульса первого осколка по условию равна нулю. Поэтому горизонтальная дальность полета s_2 второго осколка от

места разрыва равна произведению $2v$ на время t_2 его полета. Как найти это время?

Для этого вспомним, что вертикальные составляющие импульсов (а следовательно, и скоростей) осколков должны быть равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Время t_2 полета интересующего нас второго осколка зависит, очевидно, от того, вверх или вниз направлена вертикальная составляющая его скорости в момент разрыва снаряда

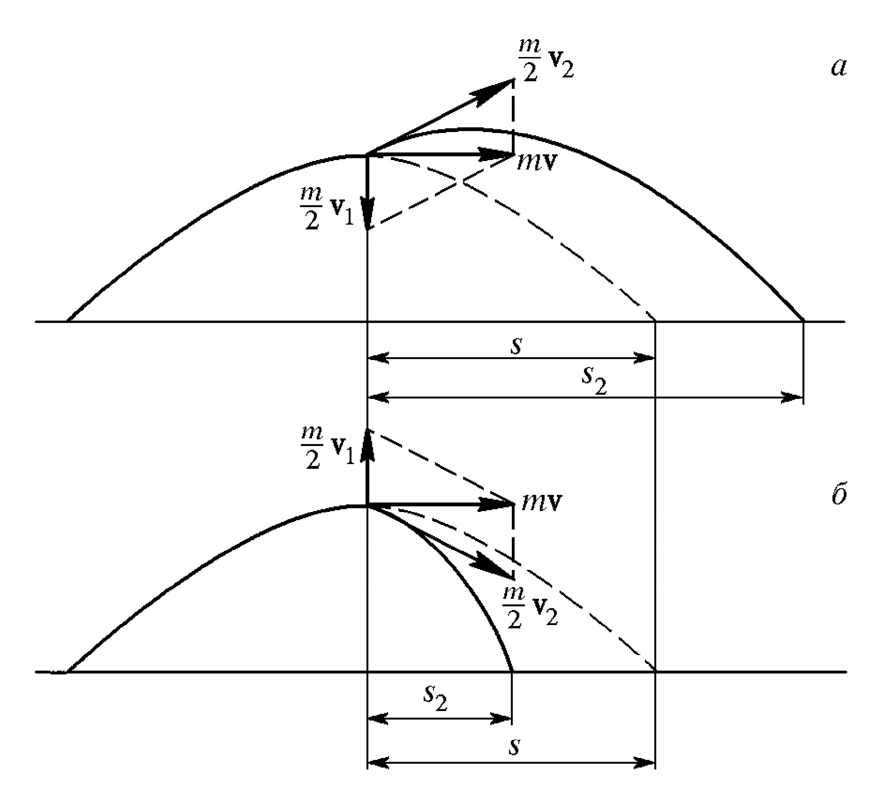


Рис. 108. Траектория осколков после разрыва снаряда

(рис. 108). Это легко выяснить, сравнив данное в условии время t_1 отвесного падения первого осколка с временем свободного падения $\sqrt{2h/g}$ с высоты h. Если $t_1 < \sqrt{2h/g}$, то начальная скорость $\mathbf{v}_1$ первого осколка направлена вниз, а вертикальная составляющая скорости $\mathbf{v}_2$ второго — вверх, и наоборот (случаи *а* и *б* на рис. 108).

Выписав выражения для времен t_1 и t_2 движения каждого из осколков и учитывая, что упомянутые выше два случая отличаются тем, что по отношению к движению по вертикали осколки в них просто меняются ролями, можно убедиться, что времена движения первого и второго осколков t_1 и t_2 связаны соотношением

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g}.$$

Таким образом, в обоих случаях время движения второго осколка t_2 выражается через данное в условии задачи время t_1 движения первого одной и той же формулой

$$t_2 = \frac{2h}{g t_1}. \tag{13}$$

Дальность его полета по горизонтали

$$s_2 = 2vt_2 = 4\,\frac{hv}{gt_1}. \tag{14}$$

Искомое отношение дальности полета второго осколка (s_2) и неразорвавшегося снаряда (s), как следует из (14) и (12), равно

$$\frac{s_2}{s} = 2\,\frac{\sqrt{2h/g}}{t_1} = 2\,\frac{t}{t_1}. \tag{15}$$

Исследуем полученный ответ. Если данное в условии время t_1 равно времени свободного падения с высоты h, то $s_2 = 2s$. В этом случае в момент разрыва первый осколок просто останавливается, а второй продолжает движение по горизонтали с удвоенной скоростью. Если $t_1 < t$, то начальная скорость второго осколка отклонена вверх (рис. 108*а*) и, как видно из (15), дальность его полета $s_2 > 2s$. Если $t_1 > t$, то первый осколок сначала летит вертикально вверх, а скорость второго отклонена вниз (рис. 108*б*). Дальность его полета $s_2 < 2s$.

Еще раз обратим внимание на то, что нам удалось решить эту задачу, ничего не зная о тех внутренних силах, благодаря которым снаряд разрывается на осколки.

Задачи для самостоятельного решения

1. Ящик с песком стоит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения ящика с поверхностью равен μ. Под углом α к вертикали в ящик влетает пуля со скоростью v и почти мгновенно застревает в песке. Ящик приходит в движение, а затем останавливается. Сколько времени продолжалось движение ящика? Отношение массы пули к массе ящика равно γ. При каких условиях ящик вообще не сдвинется?

2. При радиоактивном β-распаде покоившегося первоначально нейтрона образуются протон, электрон и антинейтрино. Импульсы протона и электрона равны p_1 и p_2, а угол между ними α. Определите импульс антинейтрино.

- Что называется импульсом одной частицы и импульсом системы материальных точек?
- Сформулируйте закон изменения импульса одной частицы и системы материальных точек. Почему внутренние силы не входят явно в закон изменения импульса системы?

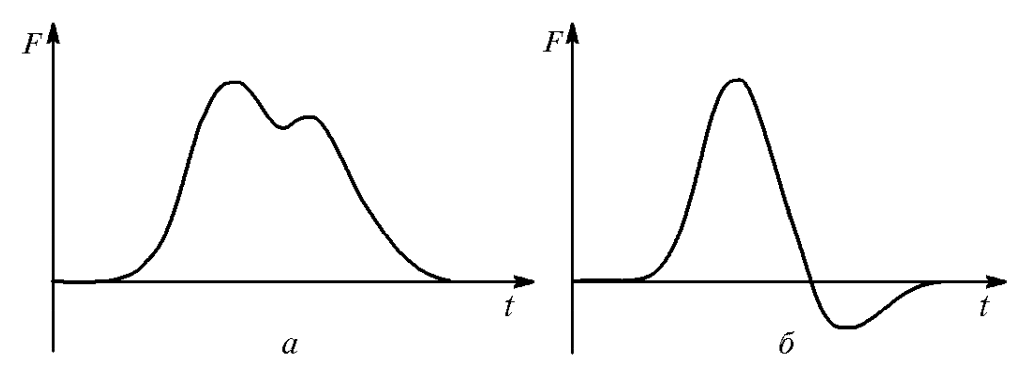


Рис. 109. К определению импульса силы из графика $F(t)$

- В каких случаях законом сохранения импульса системы можно пользоваться и при наличии внешних сил?
- Какие преимущества дает использование закона сохранения импульса по сравнению с динамическим подходом?
- Когда на тело действует переменная сила $F(t)$, ее импульс определяется правой частью формулы (5) — интегралом от $F(t)$ по промежутку времени, в течение которого она действует. Пусть нам дан график зависимости $F(t)$ (рис. 109). Как по этому графику определить импульс силы для каждого из случаев *а* и *б*?

§ 30. Центр масс. Реактивное движение

Когда мы имеем дело с системой частиц, удобно найти такую точку — *центр масс*, которая характеризовала бы положение и движение этой системы как целого. В системе из двух одинаковых частиц такая точка C, очевидно, лежит посередине между ними (рис. 110*а*). Это ясно из соображений симметрии: в однородном и изотропном пространстве эта точка выделена среди всех остальных, ибо для любой другой точки A, расположенной ближе к одной из частиц, найдется симметричная ей точка B, расположенная

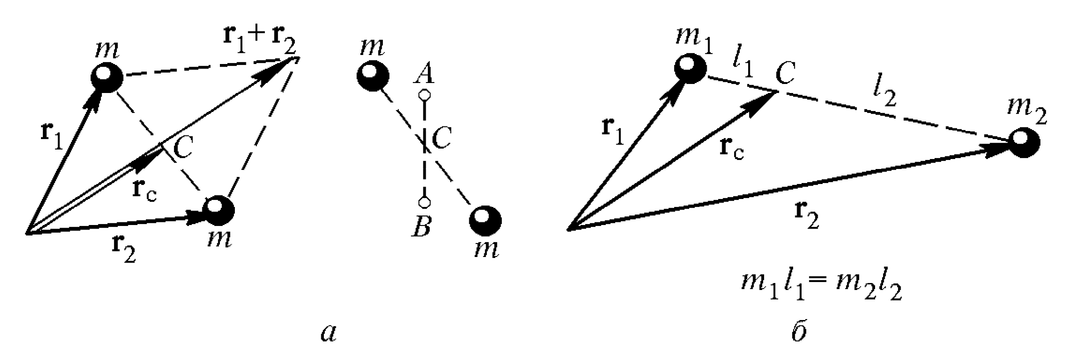


Рис. 110. Центр масс двух одинаковых частиц находится в точке C с радиусом-вектором $\mathbf{r}_c = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ (*а*); центр масс двух частиц с разной массой делит отрезок между ними в отношении, обратно пропорциональном массам частиц (*б*)

ближе ко второй частице. Очевидно, что радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ точки C равен полусумме радиусов-векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ одинаковых частиц (рис. 110*а*): $\mathbf{r}_C = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. Другими словами, $\mathbf{r}_C$ представляет собой обычное среднее значение векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Определение центра масс. Как обобщить это определение на случай двух частиц с разными массами m_1 и m_2? Можно ожидать, что наряду с геометрическим центром системы, радиус-вектор которого по-прежнему равен полусумме $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, будет играть определенную роль точка, положение которой определяется распределени-

ем масс. Ее естественно определить так, чтобы вклад каждой частицы был пропорционален ее массе:

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

Определяемый формулой (1) радиус-вектор центра масс $\mathbf{r}_C$ представляет собой среднее взвешенное значение радиусов-векторов частиц $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, что очевидно, если переписать (1) в виде

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_2.$$

Радиус-вектор каждой частицы входит в $\mathbf{r}_C$ с весом, пропорциональным ее массе. Легко видеть, что определяемый формулой (1) центр масс C лежит на отрезке прямой, соединяющей частицы, и делит его в отношении, обратно пропорциональном массам частиц: $l_1/l_2 = m_2/m_1$ (рис. 110*б*).

Обратим внимание на то, что приведенное здесь определение центра масс связано с известным вам условием равновесия рычага. Представим себе, что точечные массы m_1 и m_2, на которые действует однородное поле тяжести, соединены стержнем пренебрежимо малой массы. Такой рычаг будет в равновесии, если точку его опоры поместить в центр масс C.

Естественным обобщением формулы (1) на случай системы, состоящей из N материальных точек с массами m_1, m_2, ..., m_N и радиусами-векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_N$, является равенство

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad (2)$$

которое служит определением *радиуса-вектора центра масс* (или *центра инерции*) системы.

Скорость центра масс. Центр масс характеризует не только положение, но и движение системы частиц как целого. Скорость $\mathbf{v}_C$ центра масс, определяемая равенством $\mathbf{v}_C = d\mathbf{r}_C/dt$, как следует из (2), следующим образом выражается через скорости $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ образующих систему частиц:

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}. \qquad (3)$$

В числителе правой части этого выражения, как следует из формулы (6) предыдущего параграфа, стоит полный импульс системы **P**, а в знаменателе — ее полная масса M. Поэтому импульс системы частиц равен произведению массы всей системы M на скорость ее центра масс

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_C. \tag{4}$$

Формула (4) показывает, что импульс системы связан со скоростью ее центра масс точно так же, как импульс отдельной частицы связан со скоростью частицы. Именно в этом смысле движение центра масс и характеризует движение системы как целого.

Закон движения центра масс. Закон изменения импульса системы частиц, выражаемый формулой (9) предыдущего параграфа, по существу представляет собой *закон движения* ее *центра масс*. В самом деле, из (4) при неизменной полной массе M системы имеем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt}, \tag{5}$$

что означает, что скорость изменения импульса системы равна произведению ее массы на ускорение центра масс. Сравнивая (5) с формулой (6) § 29, получаем

$$M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i. \tag{6}$$

Согласно (6) центр масс системы движется так, как двигалась бы одна материальная точка массы M под действием силы, равной сумме всех внешних сил, действующих на входящие в систему частицы. В частности, центр масс замкнутой физической системы, на которую внешние силы не действуют, движется в инерциальной системе отсчета равномерно и прямолинейно либо покоится.

Представление о центре масс в ряде случаев позволяет получить ответы на некоторые вопросы еще проще, чем при непосредственном использовании закона сохранения импульса. Рассмотрим следующий пример.

Космонавт вне корабля. Космонавт массы m_1, неподвижный относительно космического корабля массы m_2 с выключенным двигателем, начинает подтягиваться к кораблю с помощью легкого страховочного фала. Какие расстояния пройдут космонавт и корабль до встречи, если первоначально расстояние между ними равно l?

Центр масс корабля и космонавта находится на соединяющей их прямой, причем соответствующие расстояния l_1 и l_2 обратно пропорциональны массам m_1 и m_2. Так как $l_1 + l_2 = l$ и $l_1/l_2 = m_2/m_1$, то

сразу получаем

$$l_1 = l\frac{m_2}{m_1+m_2}, \quad l_2 = l\frac{m_1}{m_1+m_2}. \qquad (7)$$

В далеком космосе, где внешние силы отсутствуют, центр масс этой замкнутой системы либо покоится, либо движется с постоянной скоростью. В той системе отсчета, где он покоится, космонавт и корабль пройдут до встречи расстояния l_1 и l_2, даваемые формулами (7).

Для справедливости подобных рассуждений принципиально важно использовать инерциальную систему отсчета. Если бы здесь мы опрометчиво связали систему отсчета с космическим кораблем, то пришли бы к заключению, что при подтягивании космонавта центр масс системы приходит в движение в отсутствие внешних сил: он приближается к кораблю. Центр масс сохраняет свою скорость только относительно инерциальной системы отсчета.

В уравнение (6), определяющее ускорение центра масс системы частиц, не входят действующие в ней внутренние силы. Значит ли это, что внутренние силы вообще никак не влияют на движение центра масс? В отсутствие внешних сил или когда эти силы постоянны, это действительно так. Например, в однородном поле тяжести центр масс разорвавшегося в полете снаряда продолжает движение по той же параболе, пока ни один из осколков еще не упал на землю.

Роль внутренних сил. В тех случаях, когда внешние силы могут изменяться, дело обстоит несколько сложнее. Внешние силы действуют не на центр масс, а на отдельные частицы системы. Эти силы могут зависеть от положения частиц, а положение каждой частицы при ее движении определяется всеми действовавшими на нее силами, как внешними, так и внутренними.

Поясним это на том же простом примере снаряда, разрывающегося в полете на мелкие осколки под действием внутренних сил. Пока все осколки в полете, центр масс, как уже говорилось, продолжает движение по той же параболе. Однако как только хотя бы один из осколков коснется земли и его движение прекратится, добавится новая внешняя сила — сила реакции поверхности земли, действующая на упавший осколок. В результате изменится ускорение центра масс, и он уже не будет двигаться по прежней параболе. Само появление этой силы реакции является следствием действия внутренних сил, разорвавших снаряд. Итак, действие внутренних сил в момент разрыва снаряда может привести к изменению ускорения, с которым будет двигаться центр масс в более поздние моменты времени и, следовательно, к изменению его траектории.

Приведем еще более яркий пример влияния внутренних сил на движение центра масс. Представим себе, что спутник Земли, об-

ращающийся вокруг нее по круговой орбите, под действием внутренних сил разделяется на две половины. Одна из половин останавливается и начинает отвесно падать на Землю. По закону сохранения импульса вторая половина должна в этот момент вдвое увеличить свою скорость, направленную по касательной к окружности. Как мы увидим ниже, при такой скорости эта половина улетит от Земли на бесконечно большое расстояние. Следовательно, и центр масс спутника, т. е. двух его половин, также удалится на бесконечно большое расстояние от Земли. И причина тому — действие внутренних сил при разделении спутника на две части, так как в противном случае неразделившийся на части спутник продолжал бы движение по круговой орбите.

Реактивное движение. Закон сохранения импульса замкнутой системы позволяет легко объяснить принцип реактивного движения. При сжигании топлива повышается температура и в камере сгорания создается высокое давление, благодаря чему образовавшиеся газы с большой скоростью вырываются из сопла двигателя ракеты. В отсутствие внешних полей полный импульс ракеты и вылетающих из сопла газов остается неизменным. Поэтому при истечении газов ракета приобретает скорость в противоположном направлении.

Уравнение Мещерского. Получим уравнение, описывающее движение ракеты. Пусть в некоторый момент времени ракета в какой-то инерциальной системе отсчета имеет скорость $\mathbf{v}$. Введем другую инерциальную систему отсчета, в которой в данный момент времени ракета неподвижна. Назовем такую систему отсчета сопутствующей. Если работающий двигатель ракеты за промежуток Δt выбрасывает газы массы $\Delta m_{\text{г}}$ со скоростью $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ относительно ракеты, то спустя время Δt скорость ракеты в этой сопутствующей системе будет отлична от нуля и равна $\Delta\mathbf{v}$.

Применим к рассматриваемой замкнутой физической системе ракета плюс газы закон сохранения импульса. В начальный момент в сопутствующей системе отсчета ракета и газы покоятся, поэтому полный импульс равен нулю. Спустя время Δt импульс ракеты равен $m\Delta\mathbf{v}$, а импульс выброшенных газов — $\Delta m_{\text{г}}\mathbf{v}_{\text{отн}}$. Поэтому

$$m\Delta\mathbf{v} + \Delta m_{\text{г}}\mathbf{v}_{\text{отн}} = 0. \tag{8}$$

Полная масса системы ракета плюс газы сохраняется, поэтому масса выброшенных газов равна убыли массы ракеты:

$$\Delta m_{\text{г}} + \Delta m = 0.$$

Теперь уравнение (8) после деления на промежуток времени Δt переписывается в виде

$$m\,\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\,\frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получаем *уравнение движения тела переменной массы* (ракеты) в отсутствие внешних сил:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt}. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет вид второго закона Ньютона, если его правую часть рассматривать как *реактивную силу*, т. е. силу, с которой действуют на ракету вылетающие из нее газы. Масса ракеты m здесь не постоянна, а убывает со временем из-за потери вещества, т. е. $dm/dt < 0$. Поэтому реактивная сила; $\mathbf{F}_{\text{р}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} dm/dt$ направлена в сторону, противоположную скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ вылетающих из сопла газов относительно ракеты. Видно, что эта сила тем больше, чем больше скорость истечения газов и чем выше расход топлива в единицу времени.

Уравнение (9) получено в определенной инерциальной системе отсчета — сопутствующей системе. Вследствие принципа относительности оно справедливо и в любой другой инерциальной системе отсчета. Если, кроме реактивной силы, на ракету действуют и какие-либо другие внешние силы $\mathbf{F}$, например сила тяжести и сила сопротивления воздуха, то их следует добавить в правую часть уравнения (9):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt} + \mathbf{F}. \tag{10}$$

Это уравнение впервые было получено Мещерским и носит его имя. При заданном режиме работы двигателя, когда масса $m(t)$ представляет собой определенную известную функцию времени, уравнение Мещерского позволяет рассчитать скорость $\mathbf{v}(t)$ ракеты в любой момент времени.

- Какие физические соображения свидетельствуют о целесообразности определения центра масс с помощью формулы (1)?
- В каком смысле центр масс характеризует движение системы частиц как целого?
- О чем говорит закон движения центра масс системы взаимодействующих тел? Влияют ли внутренние силы на ускорение центра масс?
- Могут ли внутренние силы влиять на траекторию центра масс системы?
- В задаче о разрыве снаряда, рассмотренной в предыдущем параграфе, закон движения центра масс позволяет сразу найти дальность полета второго осколка, если его начальная скорость горизонтальна. Как это сделать? Почему эти соображения неприменимы в случае, когда его начальная скорость имеет вертикальную составляющую?
- В процессе разгона ракеты ее двигатель работает в постоянном режиме, так что относительная скорость истечения газов и расход топлива в единицу времени неизменны. Будет ли при этом ускорение ракеты постоянным?
- Выведите уравнение Мещерского, используя вместо сопутствующей системы отсчета инерциальную систему, в которой ракета уже имеет скорость v.

△ **Формула Циолковского**. Допустим, что разгон ракеты происходит в свободном пространстве, где на нее не действуют внешние силы. По мере вырабатывания топлива масса ракеты убывает. Найдем зависимость между массой израсходованного топлива и набранной ракетой скоростью.

После включения двигателя покоившаяся ракета начинает набирать скорость, двигаясь по прямой линии. Спроецировав векторное уравнение (9) на направление движения ракеты, получим

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}. \qquad (11)$$

Будем в уравнении (11) рассматривать массу m ракеты как функцию набранной ракетой скорости v. Тогда скорость изменения массы со временем dm/dt можно представить следующим образом:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dv}\frac{dv}{dt}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (11), получаем

$$\frac{dm}{dv} = -\frac{1}{v_{\text{отн}}}m. \qquad (12)$$

Предположим, что скорость истечения газов $v_{\text{отн}}$ неизменна, что довольно точно выполняется в современных ракетах. В этом случае уравнение (12) позволяет легко найти массу m ракеты как функцию ее скорости. В самом деле, согласно (12) производная dm/dv искомой функции $m(v)$ пропорциональна самой функции. Таким свойством обладает только экспоненциальная функция. Поэтому решение уравнения (12) при постоянной скорости истечения $v_{\text{отн}}$ имеет вид

$$m = C\exp\left(-\frac{v}{v_{\text{отн}}}\right). \qquad (13)$$

Значение постоянной C определяется из начального условия: при $v = 0$ масса ракеты равна начальной массе m_0. Таким образом, масса ракеты m в тот момент, когда ее скорость равна v, дается формулой

$$m = m_0\exp\left(-\frac{v}{v_{\text{отн}}}\right),$$

которая называется формулой Циолковского.

Топливо для космических полетов. Формула Циолковского позволяет рассчитать запас топлива, который необходим для сообщения ракете определенной конечной скорости v. Согласно (14) отношение начальной массы m_0 ракеты к ее конечной массе m равно $\exp(v/v_{\text{отн}})$ и будет тем меньше, чем больше скорость ис-

течения газов $v_{\text{отн}}$. В современных ракетах на химическом топливе скорость газовой струи составляет от 3 до 5 км/с. Допустим, что ракете нужно сообщить первую космическую скорость, т. е. такую скорость, при которой ее полезная нагрузка может стать искусственным спутником Земли. Эта скорость равна приблизительно 8 км/с. При скорости истечения $v_{\text{отн}} = 2$ км/с формула Циолковского дает $m_0/m = 54{,}6$, т. е. практически вся начальная масса ракеты приходится на топливо. При $v_{\text{отн}} = 4$ км/с отношение m_0/m составляет уже 7,4, но и в этом случае запас топлива $m_0 - m$ должен превосходить массу m выводимого космического аппарата в несколько раз.

Технические трудности, связанные с достижением космических скоростей, преодолеваются с помощью многоступенчатых ракет, идея которых принадлежит Циолковскому. Когда массивная первая ступень ракеты — бустер — исчерпает запас топлива, она отделяется, для того чтобы не приходилось разгонять дальше уже ненужные пустые баки из-под горючего и отработавшие двигатели. Вторая ступень добавляет к ранее достигнутой скорости еще некоторую скорость, а затем отделяется и т. д.

Для межзвездных полетов космических кораблей необходимы значительно более высокие скорости. Ближайшие к нам звезды находятся на расстоянии около четырех световых лет. Поэтому для экспедиции приемлемой продолжительности необходимы скорости не меньше 0,1 скорости света c. Формула Циолковского показывает, что для достижения таких скоростей ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны. Если даже допустить, что скорость газовой струи $v_{\text{отн}}$ удастся довести до 10 км/с, то при $v = 0{,}1\,c$ отношение m_0/m составит e^{3000}, что равно примерно 10^{1300}. При полезной массе m всего лишь в одну тонну стартовая масса ракеты должна составлять 10^{1300} тонн. Эта величина превосходит всякое воображение. Для сравнения укажем, что масса нашей Галактики равна «всего лишь» $3 \cdot 10^{38}$ тонн.

- Зависит ли набранная ракетой скорость после выработки всего топлива от того, за какое время оно было израсходовано?
- Почему невозможно осуществление межзвездной космической экспедиции с использованием традиционных ракетных двигателей на химическом топливе?

§ 31. Механическая работа. Кинетическая энергия

Наряду с временно́й характеристикой действия силы — ее импульсом — в механике столь же важную роль играет и пространственная

характеристика действия силы, называемая *механической работой*. Работа ΔA силы $\mathbf{F}$ при перемещении $\Delta\mathbf{r}$ тела, к которому она приложена, определяется как скалярное произведение $\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F\,\Delta r\cos\alpha, \tag{1}$$

где α — угол между направлениями $\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{r}$. Из определения (1) следует, что работа некоторой силы равна произведению проекции силы на направление перемещения и модуля этого перемещения, или наоборот: произведению модуля силы и проекции перемещения на направление действия силы.

Свойства работы. Если на тело действуют сразу несколько сил, то можно говорить о работе каждой из них в отдельности и о работе равнодействующей этих сил, т. е. их векторной суммы. Из определения работы следует, что работа суммы сил равна сумме работ каждой из них: когда $\mathbf{F} = \sum\limits_i \mathbf{F}_i$, имеем

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{F}_i\cdot\Delta\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{F}_i\cdot\Delta\mathbf{r} = \sum_i \Delta A_i,$$

так как проекция суммы векторов $\sum\limits_i \mathbf{F}_i$ равна проекции результирующего вектора $\mathbf{F}$.

Работа силы — это скалярная алгебраическая величина, которая, как следует из (1), может быть положительной (когда сила направлена вдоль перемещения или образует с ним острый угол), отрицательной (когда сила направлена противоположно перемещению или образует с ним тупой угол) и равной нулю (если сила направлена перпендикулярно перемещению или если перемещения тела, на которое она действует, вообще не происходит).

Рассмотрим, например, работу сил, действующих на ящик при его перемещении по горизонтальному полу, когда его тянут за веревку, направленную под углом к горизонту (рис. 111).

Сила $\mathbf{F}$ натяжения веревки при перемещении ящика вправо на расстояние $\Delta\mathbf{r}$ совершает положительную работу, равную $F\cos\alpha\,\Delta r$. Работа силы трения отрицательна и равна $-F_{\text{тр}}\,\Delta r$, так как угол между $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ и $\Delta\mathbf{r}$ равен π, а его косинус равен -1. При равномерном движении ящика, когда $F\cos\alpha = F_{\text{тр}}$, сумма работ сил $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ равна нулю. Если же ящик разгоняется, т. е. $F\cos\alpha > F_{\text{тр}}$, сумма работ этих сил положительна. Сила реакции опоры $\mathbf{N}$ и сила тяжести $m\mathbf{g}$ при горизонтальном перемещении ящика работы не совершают, так как они перпендикулярны перемещению и косинусы соответствующих углов равны нулю.

Приведенное определение (1) работы как скалярного произведения векторов силы и перемещения справедливо при условии, что сила $\mathbf{F}$ постоянна на всем перемещении $\Delta\mathbf{r}$. Подчеркнем, что участок

траектории между начальной и конечной точками перемещения $\Delta\mathbf{r}$ может быть любым, в том числе и криволинейным. Единственным

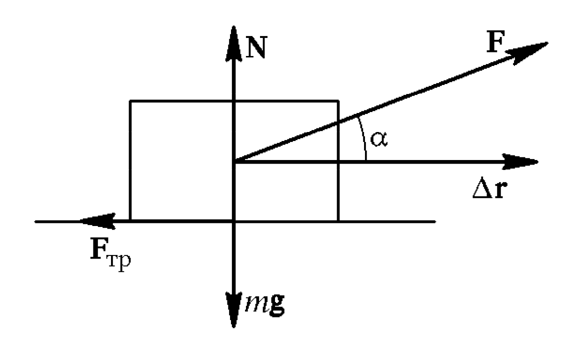


Рис. 111. Работа, совершаемая разными силами, при перемещении ящика

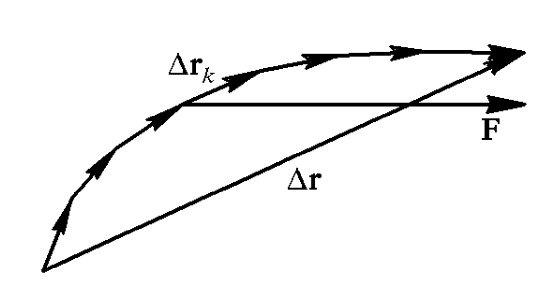


Рис. 112. Работа силы **F** на перемещении $\Delta\mathbf{r}$ равна сумме работ на разных участках

условием, определяющим выбор $\Delta\mathbf{r}$, является требование неизменности силы **F** (как по модулю, так и по направлению) на всем протяжении этого участка траектории.

Действительно, полное перемещение $\Delta\mathbf{r}$ можно представить как векторную сумму более «мелких» перемещений $\Delta\mathbf{r}_k$ (рис. 112): $\Delta\mathbf{r} = \sum\limits_k \Delta\mathbf{r}_k$. Подставляя эту сумму в выражение (1) для работы, получаем

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = \sum_k \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}_k = \sum_k \Delta A_k,$$

где ΔA_k — работа силы **F** на отдельном «мелком» перемещении $\Delta\mathbf{r}_k$. Таким образом, при постоянной силе работа на всем перемещении $\Delta\mathbf{r}$ распадается на сумму работ этой силы на отдельных участках, причем сумма не зависит от того, каким образом все перемещение $\Delta\mathbf{r}$ разбито на отдельные части.

Работа переменной силы. Если при перемещении тела действующая на него сила изменяется, то для вычисления ее работы траекторию нужно разбить на малые участки, в пределах которых силу можно считать постоянной. Тогда работа ΔA_i на отдельном участке траектории, характеризуемом вектором перемещения $\Delta\mathbf{r}_i$, определяется той же формулой (1):

$$\Delta A_i = \mathbf{F}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i = F_i\,\Delta r_i\cos\alpha_i, \qquad (2)$$

где F_i — значение силы на этом i-м участке. Полная работа рассматриваемой силы на всей траектории определяется как алгебраическая сумма работ на отдельных участках:

$$\Delta A = \sum_i \Delta A_i = \sum_i \mathbf{F}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i = \sum_i F_i\,\Delta r_i\cos\alpha_i. \qquad (3)$$

Соотношение (3) означает, что работа силы $\mathbf{F}$ на всей траектории выражается интегралом, вычисляемым вдоль траектории:

$$\Delta A = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \tag{4}$$

где 1 и 2 — начальная и конечная точки траектории.

Мощность. Отношение работы ΔA к промежутку времени Δt, в течение которого она совершена, называется *средней мощностью* $P_{ср}$ за время Δt:

$$P_{ср} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Мгновенной мощностью или просто *мощностью* P называется предел этого отношения при $\Delta t \to 0$:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{F}\cdot\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}.$$

Таким образом, мощность равна скалярному произведению силы на скорость. Мощность — это основная характеристика любой машины или устройства, используемого для совершения работы.

Единицы работы и мощности. Напомним, что в СИ работа измеряется в джоулях: джоуль (Дж) — это работа, совершаемая силой в 1 ньютон при перемещении тела на 1 метр в направлении действия силы: 1 Дж = 1 Н · 1 м.

Мощность измеряется в джоулях в секунду. Такая единица мощности называется ваттом (Вт): 1 Вт = 1 Дж/с. В технике используются также единицы в тысячу и в миллион раз больше ватта, имеющие названия соответственно киловатт (кВт) и мегаватт (МВт).

В системе единиц СГС работа измеряется в эргах: 1 эрг = = 1 дин · 1 см. Мощность измеряется в эргах в секунду (эрг/с). Специального названия эта единица мощности не имеет.

Кинетическая энергия. Временна́я характеристика действия силы, т. е. импульс силы, определяет, как мы видели, изменение импульса тела, на которое она действует. Пространственная характеристика действия силы, т. е. работа силы, определяет изменение кинетической энергии тела.

Кинетической энергией $E_к$ материальной точки массы m, движущейся со скоростью v, называется скалярная величина, пропорциональная массе и квадрату скорости:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}. \tag{5}$$

Покажем, что изменение этой величины при движении тела равно работе векторной суммы всех действующих на тело сил. На-

чнем с простейшего случая, когда на покоившееся тело начинает действовать постоянная сила **F**. Тело будет двигаться в направлении действующей силы с постоянным ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$. Поэтому для работы ΔA силы **F**, учитывая, что угол между **F** и $\Delta\mathbf{r}$ равен нулю, имеем

$$\Delta A = F\,\Delta r = ma\,\Delta r = m\frac{v}{t}\frac{v}{2}\,t = \frac{mv^2}{2}. \tag{6}$$

Так как кинетическая энергия покоившегося тела равна нулю, то совершенная при разгоне работа равна изменению кинетической энергии тела.

Пусть теперь в начальный момент тело имеет скорость $\mathbf{v}_0$, а действующая на него с этого момента постоянная сила **F** может и не совпадать по направлению со скоростью. В этом случае для работы силы **F** с помощью второго закона Ньютона имеем

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = m\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{r} = m\,\frac{\mathbf{v}-\mathbf{v}_0}{t}\cdot\frac{\mathbf{v}+\mathbf{v}_0}{2}\,t = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \tag{7}$$

Видно, что и в этом случае *изменение кинетической энергии тела равно работе всех действующих на него сил.* Это утверждение называется *теоремой о кинетической энергии.* Оно представляет собой следствие второго закона Ньютона.

Теорема о кинетической энергии. Докажем теорему о кинетической энергии для общего случая, когда в процессе перемещения тела сила не остается постоянной. Перемещение $\Delta\mathbf{r}$ всегда можно разбить на столь малые участки, чтобы силу в пределах каждого участка можно было считать постоянной. Тогда для каждого участка будет справедливо соотношение (7). Сложим почленно все выражения (7), записанные для каждого из участков. В левой части получим полную работу на всем перемещении. При сложении правых частей следует учесть, что конечная скорость на каждом участке совпадает с начальной скоростью на следующем. В результате в правой части останутся только два слагаемых, соответствующих конечной скорости v на последнем участке и начальной скорости v_0 на первом:

$$\Delta A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \tag{8}$$

Использование теоремы о кинетической энергии облегчает решение многих механических задач.

Задача

Выскальзывающая доска. На конце доски длины L и массы M находится маленький брусок массы m (рис. 113). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска о

поверхность доски равен μ. Какую горизонтальную скорость нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска?

Р е ш е н и е. При сообщении доске горизонтальной скорости v_0 резким толчком или ударом брусок не получает скорости относительно земли, так как действующая на него со стороны доски сила трения не превосходит значения μmg и за короткое время удара не может сообщить бруску заметного импульса.

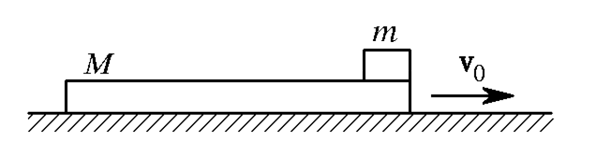


Рис. 113. К определению условий выскальзывания доски

После толчка в системе отсчета, связанной с землей, из-за сил взаимного трения брусок движется равноускоренно, а доска — равнозамедленно. Если начальная скорость доски v_0 невелика, то может наступить такой момент, когда скорости доски и бруска примут одинаковые значения. В этот момент проскальзывание прекращается, далее доска и брусок движутся равномерно с одинаковой скоростью v как одно тело, и доска, разумеется, уже не выскользнет из-под бруска. Если же начальная скорость доски достаточно велика, то скорости доски и бруска могут не успеть сравняться за то время, пока брусок скользит вдоль всей доски. В этом случае доска выскользнет из-под бруска.

Обозначим расстояние, которое брусок должен пройти по доске до момента прекращения проскальзывания, через l. Очевидно, что при выполнении неравенства $l < L$ доска не выскользнет из-под бруска. В противном случае доска выскользнет.

Поскольку по условию задачи между доской и горизонтальной плоскостью трения нет, то направленный горизонтально полный импульс системы остается без изменения. Так как после прекращения относительного проскальзывания брусок и доска движутся с одинаковой скоростью v, то

$$Mv_0 = (M + m)v. \qquad (9)$$

Применим теорему о кинетической энергии для каждого из тел. Действующие по вертикали силы тяжести и силы реакции работы не совершают, ибо

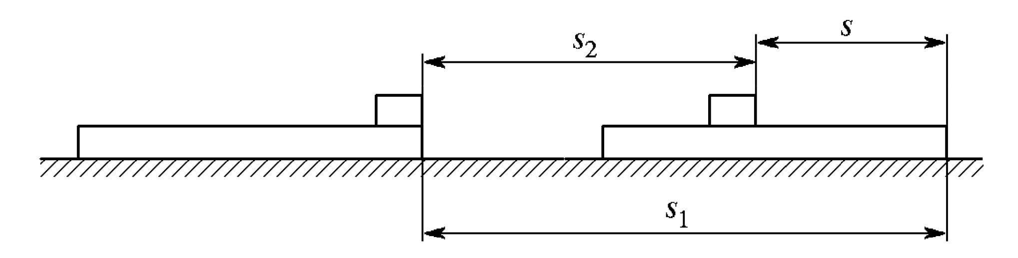


Рис. 114. Перемещение доски и бруска

направлены перпендикулярно перемещениям доски и бруска. Поэтому нужно рассматривать только работу сил трения. Перемещения доски l_1 и бруска l_2 относительно земли показаны на рис. 114. Разгоняющая брусок до скорости v сила трения μmg совершает положительную работу μmgl_2, поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgl_2. \qquad (10)$$

Тормозящая доску сила трения μmg совершает отрицательную работу, равную $-\mu mgl_1$:

$$\frac{Mv^2}{2}-\frac{Mv_0^2}{2}=-\mu mgl_1. \tag{11}$$

Обратим внимание на то, что точки приложения сил трения, действующих на брусок и на доску, совершают одинаковые перемещения относительно земли, равные перемещению бруска l_2. Однако в выражениях (10) и (11), в соответствии с определением работы (1), фигурируют перемещения самих тел, на которые действуют эти силы, а не перемещения точек приложения сил.

Складывая почленно выражения (10) и (11), получаем

$$\frac{(M+m)v^2}{2}-\frac{Mv_0^2}{2}=-\mu mgl, \tag{12}$$

где, как следует из рис. 114, $l=l_1-l_2$ представляет собой перемещение бруска относительно доски. Равенство (12) означает, что изменение кинетической энергии всей системы равно суммарной работе действующих в ней сил трения. Выражая конечную скорость v из уравнения (9) и подставляя в (12), находим

$$l=\frac{1}{2}\frac{M}{M+m}\frac{v^2}{\mu g}. \tag{13}$$

Если вычисленное по формуле (13) значение l окажется больше L, то это и будет означать, что при такой начальной скорости доски v_0 она выскользнет из-под бруска. Отсюда находим необходимое для этого значение v_0:

$$v_0>\sqrt{2\mu gl\left(1+\frac{m}{N}\right)}\ .$$

Задача для самостоятельного решения

Оцените среднюю силу, действующую на ноги человека после его прыжка на землю с платформы высотой 3 м.

- В чем заключается различие понятий работы в механике и в повседневной жизни? Какую механическую работу совершает штангист, когда он поднимает штангу и когда держит ее на вытянутых руках? Носильщик, равномерно несущий чемодан по горизонтальной дороге, по лестнице вверх и вниз?
- Приведите примеры, в которых сила совершает отрицательную механическую работу.
- Выпишите размерности работы и мощности. Найдите соотношение между единицами этих величин в СИ и СГС.
- Какие формулы кинематики использованы при получении формул (6) и (7) для изменения кинетической энергии?
- На тело действует сразу несколько сил. Работа какой силы фигурирует в теореме о кинетической энергии (8)?
- Скользившая по инерции по гладкому льду доска налетает на вмерзшие в лед песчинки и благодаря возникшему трению останавливается. Оче-

видно, что точка приложения силы трения не перемещается в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей. Как согласовать все это с теоремой о кинетической энергии? Совершает ли работу действующая на доску сила трения?

- Решите разобранную в этом параграфе задачу о выскальзывающей доске с помощью законов Ньютона, не используя закон сохранения импульса и теорему о кинетической энергии.

§ 32. Потенциальная энергия

Понятие энергии как физической величины вводится для характеристики способности тела или системы тел к совершению работы. Как известно, существуют различные виды энергии. Наряду с уже рассмотренной выше кинетической энергией, которой обладает движущееся тело, существуют различные виды потенциальной энергии: потенциальная энергия в поле тяжести, потенциальная энергия растянутой или сжатой пружины или вообще любого упруго деформированного тела и т. д.

Превращения энергии. Основное свойство энергии заключается в ее способности к превращению из одного вида в другой в эквивалентных количествах. Известные примеры таких превращений — переход потенциальной энергии в кинетическую при падении тела с высоты, переход кинетической энергий в потенциальную при подъеме брошенного вверх тела, чередующиеся взаимные превращения кинетической и потенциальной энергий при колебаниях маятника. Каждый из вас может привести массу других подобных примеров.

Потенциальная энергия связана с взаимодействием тел или частей одного тела. Для последовательного введения этого понятия естественно рассмотреть систему взаимодействующих тел. Отправным пунктом здесь может служить теорема о кинетической энергии системы, определяемой как сумма кинетических энергий составляющих систему частиц:

$$E_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{1}$$

Работа внутренних сил. Как и раньше, когда обсуждался закон сохранения импульса системы тел, будем делить действующие на тела системы силы на внешние и внутренние. По аналогии с законом изменения импульса можно было бы ожидать, что для системы материальных точек изменение кинетической энергии системы будет равно работе только внешних сил, действующих на систему. Но легко видеть, что это не так. При рассмотрении из-

менения полного импульса системы импульсы внутренних сил взаимно уничтожались из-за третьего закона Ньютона. Однако работы внутренних сил попарно уничтожаться не будут, так как в общем случае частицы, на которые эти силы действуют, могут совершать разные перемещения.

Действительно, при вычислении импульсов внутренних сил они умножались на одно и то же время взаимодействия, а при вычислении работы эти силы умножаются на перемещения соответствующих тел, которые могут различаться. Например, если две притягивающиеся частицы переместятся навстречу друг другу, то внутренние силы их взаимодействия совершат положительные работы и их сумма будет отлична от нуля.

Таким образом, работа внутренних сил может привести к изменению кинетической энергии системы. Именно благодаря этому обстоятельству механическая энергия системы взаимодействующих тел не сводится только к сумме их кинетических энергий. Полная механическая энергия системы наряду с кинетической энергией включает в себя потенциальную энергию взаимодействия частиц системы. Полная энергия зависит от положений и скоростей частиц, т. е. она представляет собой функцию механического состояния системы.

Потенциальная энергия. Наряду с делением сил, действующих на частицы системы, на внешние и внутренние, для введения понятия потенциальной энергии нужно разбить все силы на две группы по другому признаку.

В первую группу отнесем силы, работа которых при изменении взаимных положений частиц не зависит от способа изменения конфигурации системы, т. е. от того, по каким траекториям и в какой последовательности частицы системы перемещаются из своих начальных положений в конечные. Такие силы будем называть *потенциальными*. Примерами потенциальных сил могут служить силы тяготения, кулоновские силы электростатического взаимодействия заряженных частиц, упругие силы. Соответствующие силовые поля также называются потенциальными.

Ко второй группе отнесем силы, работа которых зависит от формы пути. Эти силы объединим под названием непотенциальных. Наиболее характерный пример непотенциальных сил — сила трения скольжения, направленная противоположно относительной скорости.

Работа в однородном поле. Потенциальная энергия количественно определяется через работу потенциальных сил. Рассмотрим, например, некоторое тело в однородном поле тяжести Земли, которую из-за ее большой массы будем считать неподвижной. В однородном поле действующая на тело сила тяжести всюду одинакова, и потому, как было показано в предыдущем параграфе,

ее работа при перемещении тела не зависит от формы траектории, соединяющей начальную и конечную точки. Работа A_{12} силы тяжести $m\mathbf{g}$ при перемещении тела из положения *1* в положение 2 (рис. 115) определяется только разностью высот h_1 и h_2 в начальном и конечном положениях:

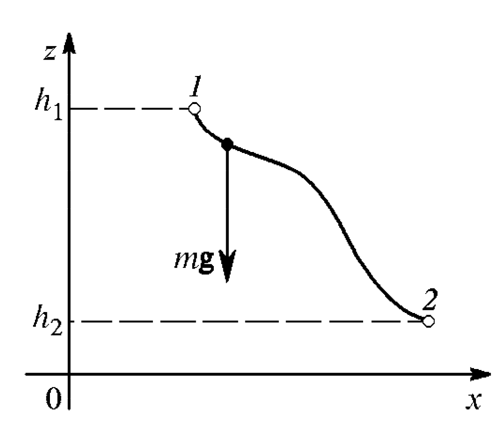


Рис. 115. Работа силы тяжести $m\mathbf{g}$ при перемещении из положения *1* в положение *2* равна $mg(h_1-h_2)$

$$A_{12}=mg(h_1-h_2). \qquad (2)$$

Так как работа не зависит от формы пути, она может служить характеристикой начальной и конечной точек, т. е. характеристикой самого силового поля.

Примем какую-либо точку поля (например, ту, от которой отсчитаны высоты в формуле (2)) за начало отсчета и будем рассматривать работу, совершаемую силой тяжести при перемещении частицы в эту точку из другой произвольной точки P, находящейся на высоте h. Эта работа, как следует из (2), равна mgh и называется *потенциальной энергией* $E_п$ частицы в точке P:

$$E_п=mgh. \qquad (3)$$

Фактически это есть потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тела и Земли, создающей это поле.

Работа и потенциальная энергия. Работа силы тяжести при перемещении тела из точки *1* в точку 2, даваемая формулой (2), равна разности потенциальных энергий в начальной и конечной точках пути:

$$A_{12}=(E_п)_1-(E_п)_2. \qquad (4)$$

В произвольном потенциальном поле, где модуль и направление силы зависят от положения частицы, потенциальная энергия в некоторой точке P, как и в однородном поле, равна работе силы поля при перемещении частицы из этой точки P в начало отсчета, т. е. в фиксированную точку, потенциальная энергия в которой принята равной нулю. Выбор точки, в которой потенциальная энергия принимается равной нулю, произволен и определяется только соображениями удобства. Например, в однородном поле тяжести Земли отсчет высоты и потенциальной энергии удобно вести от поверхности Земли (уровня моря).

Отмеченная неоднозначность в определении потенциальной энергии никак не сказывается на результатах при практическом использовании понятия потенциальной энергии, так как физический смысл

имеет только изменение потенциальной энергии, т. е. разность ее значений в двух точках поля, через которую выражается работа сил поля при перемещении тела из одной точки в другую.

Центральное поле. Покажем потенциальный характер *центрального поля*, в котором сила зависит только от расстояния до силового центра и направлена по радиусу. Примерами центральных полей могут служить поле тяготения планеты или любого тела со сферически-симметричным распределением масс, электростатическое поле точечного заряда и т. д.

Пусть тело, на которое действует центральная сила **F**, направленная по радиусу от силового центра O (рис. 116), перемещается из точки *1* в точку 2 по некоторой кривой. Разобьем весь путь. на маленькие участки $\Delta\mathbf{l}$ так, чтобы силу **F** в пределах каждого участка можно было считать постоянной. Работа силы **F** на таком участке

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{l} = F\,\Delta l\cos\alpha.$$

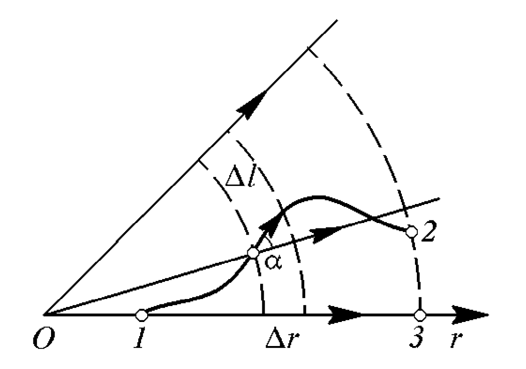


Рис. 116. Работа сил центрального поля

Но как видно из рис. 116, $\Delta l\cos\alpha$ есть проекция элементарного перемещения $\Delta\mathbf{l}$ на направление радиуса-вектора **r**, проведенного из силового центра: $\Delta l\cos\alpha = \Delta r$. Таким образом, $\Delta A = F\,\Delta r$ — работа на отдельном участке равна произведению силы на изменение расстояния до силового центра. Суммируя работы на всех участках, убеждаемся, что работа сил поля при перемещении тела из точки *1* в точку 2 равна работе по перемещению вдоль радиуса из точки *1* в точку 3 (рис. 116). Итак, эта работа определяется только начальным и конечным расстояниями тела от силового центра и не зависит от формы пути, что и доказывает потенциальный характер любого центрального поля.

Потенциальная энергия в поле тяготения. Чтобы получить явное выражение для потенциальной энергии тела в некоторой точке поля, нужно рассчитать работу при перемещении тела из этой точки в другую, потенциальная энергия в которой принимается равной нулю. Приведем выражения для потенциальной энергии в некоторых важных случаях центральных полей.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия точечных масс m и M или тел со сферически-симметричным распределением масс, центры которых находятся на расстоянии r друг от друга, дается выражением

$$E_{\text{п}} = -G\,\frac{mM}{r}. \tag{5}$$

Разумеется, об этой энергии можно говорить и как о потенциальной энергии тела массы m в поле тяготения, создаваемом телом массы M. В выражении (5) потенциальная энергия принята равной нулю при бесконечно большом расстоянии между взаимодействующими телами: $E_п = 0$ при $r \to \infty$.

Для потенциальной энергии тела массы m в поле тяготения Земли удобно видоизменить формулу (5) с учетом соотношения (7) из § 23 и выразить потенциальную энергию через ускорение свободного падения g у поверхности Земли и радиус Земли R:

$$E_п = -mg\frac{R^2}{r}. \tag{6}$$

Если высота тела h над поверхностью Земли мала по сравнению с радиусом Земли ($h \ll R$), то, подставляя в (6) r в виде $r = R + h$ и используя приближенную формулу $1/(1+x) = 1 - x$ (при $x \ll 1$), можно преобразовать формулу (6) следующим образом:

$$E_п = -mg\frac{R^2}{R+h} = -\frac{mgR}{1+h/R} = -mgR + mgh. \tag{7}$$

Первое слагаемое в правой части (7) можно опустить, так как оно постоянно, т. е. не зависит от положения тела. Тогда вместо (7) имеем

$$E_п = mgh, \tag{8}$$

что совпадает с формулой (3), полученной в приближении «плоской» Земли для однородного поля тяжести. Подчеркнем, однако, что в отличие от (6) или (7) в формуле (8) потенциальная энергия отсчитывается от поверхности Земли.

Задачи

1. *Потенциальная энергия в поле тяготения Земли.* Чему равна потенциальная энергия тела на поверхности Земли и на бесконечно большом расстоянии от Земли, если принять ее равной нулю в центре Земли?

Решение. Чтобы найти потенциальную энергию тела на поверхности Земли при условии, что она равна нулю в центре Земли, нужно рассчитать работу, совершаемую силой тяготения при мысленном перемещении тела с поверхности Земли в ее центр. Как было выяснено ранее (см. формулу (10) § 23), действующая на находящееся в глубине Земли тело сила тяготения пропорциональна его расстоянию r от центра Земли, если считать Землю однородным шаром с одинаковой всюду плотностью:

$$F(r) = \frac{mgr}{R}.$$

Для вычисления работы весь путь от поверхности Земли до ее центра разбиваем на малые участки, на протяжении которых силу можно считать постоянной. Работа на отдельном малом участке изображается на графике зависимости силы от расстояния (рис. 117) площадью узкой заштрихованной полоски. Эта работа положительна, так как направления силы тяжести и перемещения совпадают. Полная работа, очевидно, изобража-

ется площадью треугольника с основанием R и высотой mg:

$$A = \frac{1}{2} mgR. \tag{9}$$

Значение потенциальной энергии на поверхности Земли равно работе, даваемой формулой (9):

$$E_{\text{п}}(R) = \frac{1}{2} mgR, \text{ если } E_{\text{п}}(0) = 0. \tag{10}$$

Для того чтобы найти значение потенциальной энергии на бесконечно большом расстоянии от Земли, следует учесть, что разность потенциальных энергий на бесконечности и на поверхности Земли равна, в соответствии с (6), mgR и не зависит от того, где выбран нуль потенциальной энергии. Именно такую величину нужно прибавить к значению (10) потенциальной энергии на поверхности, чтобы получить искомое значение на бесконечности:

$$E_{\text{п}}(r \to \infty) = \frac{1}{2} mgR + mgR = \frac{3}{2} mgR. \tag{11}$$

2. *График потенциальной энергии.* Постройте график потенциальной энергии тела массы m в поле тяготения Земли, считая ее однородным шаром.

Решение. Примем для определенности значение потенциальной энергии в центре Земли равным нулю. Для любой внутренней точки,

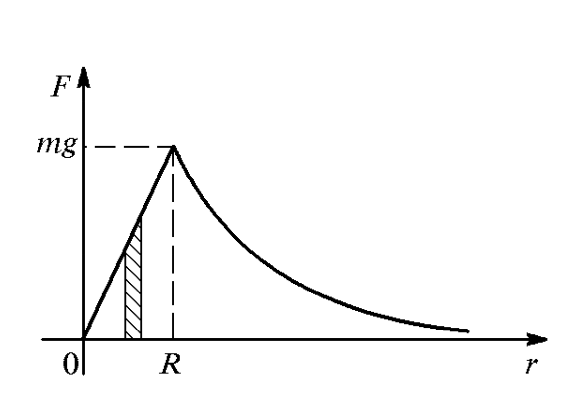


Рис. 117. К расчету потенциальной энергии

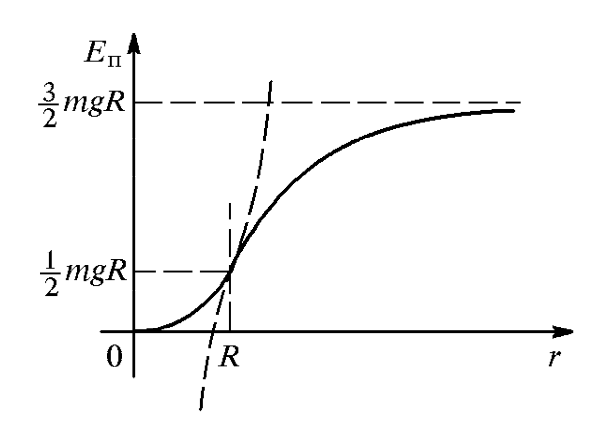


Рис. 118. График потенциальной энергии

находящейся на расстоянии r ($r \leqslant R$) от центра Земли, потенциальная энергия рассчитывается так же, как и в предыдущей задаче: как следует из рис. 117, она равна площади треугольника с основанием r и высотой $F(r) = mgr/R$. Таким образом,

$$E_{\text{п}}(r) = \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R} \quad (r \leqslant R). \tag{12}$$

Для построения графика потенциальной энергии при $r \geqslant R$, где сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояния (рис. 117), следует воспользоваться формулой (6). Но в соответствии со сделанным выбором точки отсчета потенциальной энергии к значению, даваемому фор-

мулой (6), следует прибавить постоянную величину $\frac{3}{2}mgR$. Поэтому

$$E_п(r) = \frac{3}{2}mgR - mg\frac{R^2}{r} = mgR\left(\frac{3}{2} - \frac{R}{r}\right) \quad (r \geqslant R). \tag{13}$$

Полный график $E_п(r)$ показан на рис.118. На участке от центра Земли до ее поверхности ($0 \leqslant r \leqslant R$) он представляет собой отрезок параболы (12), минимум которой расположен при $r = 0$. Такую зависимость иногда называют «квадратичной потенциальной ямой». На участке от поверхности Земли до бесконечности ($R \leqslant r \leqslant \infty$) график представляет собой отрезок гиперболы (13). Эти отрезки параболы и гиперболы плавно, без излома, переходят друг в друга. Ход графика соответствует тому, что в случае сил притяжения потенциальная энергия возрастает при увеличении расстояния.

Энергия упругой деформации. К потенциальным силам относятся также и силы, возникающие при упругой деформации тел. В соответствии с законом Гука эти силы пропорциональны деформации. Поэтому потенциальная энергия упругой деформации квадратично зависит от деформации. Это становится сразу ясным, если учесть, что зависимость силы от смещения из положения равновесия здесь такая же, как и у рассмотренной выше силы тяжести, действующей на тело внутри однородного массивного шара. Например, при растяжении или сжатии на Δl упругой пружины жесткости k, когда действующая сила $F = k\,\Delta l$, потенциальная энергия дается выражением

$$E_п = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{14}$$

Здесь принято, что в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю.

Потенциальная энергия в каждой точке силового поля имеет определенное значение. Поэтому она может служить характеристикой этого поля. Таким образом, силовое поле можно описать, задавая либо силу в каждой точке, либо значение потенциальной энергии. Эти способы описания потенциального силового поля эквивалентны.

Связь силы и потенциальной энергии. Установим связь этих двух способов описания, т. е. общее соотношение между силой и изменением потенциальной энергии. Рассмотрим перемещение $\Delta\mathbf{l}$ тела между двумя близкими точками поля. Работа сил поля при этом перемещении равна $\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{l}$. С другой стороны, эта работа равна разности значений потенциальной энергии в начальной и конечной точках перемещения $\Delta\mathbf{l}$, т. е. взятому с обратным знаком изменению $\Delta E_п = E_2 - E_1$ потенциальной энергии. Поэтому

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{l} = -\Delta E_п.$$

Левую часть этого соотношения можно записать в виде произведения проекции F_l силы $\mathbf{F}$ на направление перемещения $\Delta\mathbf{l}$ и модуля этого перемещения Δl: $\mathbf{F}\,\Delta\mathbf{l} = F_l\,\Delta l$. Отсюда

$$F_l = -\frac{\Delta E_\text{п}}{\Delta l}. \tag{15}$$

Проекция потенциальной силы на произвольное направление может быть найдена как взятое с обратным знаком отношение изменения потенциальной энергии при малом перемещении вдоль этого направления к модулю перемещения.

Эквипотенциальные поверхности. Обоим способам описания потенциального поля можно сопоставить наглядные геометрические образы — картины силовых линий или эквипотенциальных поверхностей. Потенциальная энергия частицы в силовом поле является функцией ее координат. Приравнивая $E_\text{п}(x, y, z)$ постоянной величине, получаем уравнение поверхности, во всех точках которой потенциальная энергия имеет одно и то же значение. Эти поверхности равных значений потенциальной энергии, называемые *эквипотенциальными*, дают наглядную картину силового поля.

Сила в каждой точке направлена перпендикулярно проходящей через эту точку эквипотенциальной поверхности. Это легко увидеть с помощью формулы (15). В самом деле, выберем перемещение $\Delta\mathbf{l}$ вдоль поверхности постоянной энергии. Тогда $\Delta E_\text{п} = 0$ и, следовательно, равна нулю проекция силы на поверхность $E_\text{п} = \text{const}$. Так, например, в гравитационном поле, создаваемом телом массы M со сферически-симметричным распределением масс, потенциальная энергия тела массы m дается выражением (5) . Поверхности постоянной энергии такого поля представляют собой сферы, центры которых совпадают с силовым центром.

Действующая на массу m сила перпендикулярна эквипотенциальной поверхности и направлена к силовому центру. Проекцию этой силы на радиус, проведенный из силового центра, можно найти из выражения (5) для потенциальной энергии с помощью формулы (15):

$$F_r = -\frac{\Delta E_\text{п}}{\Delta r} = \frac{GmM}{\Delta r}\left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{GmM}{r(r+\Delta r)},$$

что при $\Delta r \to 0$ дает

$$F_r = -G\,\frac{mM}{r^2}.$$

Полученный результат подтверждает приведенное выше без доказательства выражение для потенциальной энергии (5).

Наглядное представление о поверхностях равных значений потенциальной энергии можно составить на примере рельефа пересеченной

местности. Точкам земной поверхности, находящимся на одном горизонтальном уровне, соответствуют одинаковые значения потенциальной энергии поля тяготения. Эти точки образуют непрерывные линии. На топографических картах такие линии называются горизонталями. По горизонталям легко восстановить все черты рельефа: холмы, впадины, седловины. На крутых склонах горизонтали идут гуще, ближе друг к другу, чем на пологих. В этом примере равным значениям потенциальной энергии соответствуют линии, а не поверхности, так как здесь речь идет о силовом поле, где потенциальная энергия зависит от двух координат (а не от трех).

- Объясните различие между потенциальными и непотенциальными силами.
- Что такое потенциальная энергия? Какие силовые поля называются потенциальными?
- Получите выражение (2) для работы силы тяжести в однородном поле Земли.
- С чем связана неоднозначность потенциальной энергии и почему эта неоднозначность никак не сказывается на физических результатах?
- Докажите, что в потенциальном силовом поле, где работа при перемещении тела между любыми двумя точками не зависит от формы траектории, работа при перемещении тела по любому замкнутому пути равна нулю.
- Получите выражение (6) для потенциальной энергии тела массы m в поле тяготения Земли. Когда справедлива эта формула?
- Чемодан нельзя считать телом со сферически-симметричным распределением массы. Тем не менее при подсчете его потенциальной энергии в поле тяготения Земли можно пользоваться формулой (6). Объясните, почему.
- Как зависит потенциальная энергия в поле тяготения Земли от высоты над поверхностью? Рассмотрите случаи, когда высота мала и когда она сравнима с радиусом Земли.
- Укажите на графике зависимости потенциальной энергии от расстояния r (см. рис. 118) область, где справедливо линейное приближение (7).

Δ **Вывод формулы для потенциальной энергии.** Чтобы получить формулу (5) для потенциальной энергии в центральном поле тяготения, нужно вычислить работу сил поля при мысленном перемещении тела массы m из данной точки в бесконечно удаленную точку. Работа в соответствии с формулой (4) § 31, выражается интегралом от силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ вдоль траектории, по которой перемещается тело. Так как эта работа не зависит от формы траектории, вычислять интеграл можно для перемещения по радиусу, проходящему через интересующую нас точку:

$$E_{\text{п}}(r) = \int_r^\infty F_r(r)\,dr = -\int_r^\infty G\frac{mM}{r^2}\,dr = -G\frac{mM}{r}. \qquad (16)$$

Формулу (15), выражающую силу через потенциальную энергию, строго говоря, следует понимать в смысле предельного перехода, рассматривая правую часть (15) как производную от потенциальной энергии по пространственным координатам, от которых зависит потенциальная энергия. Например, проекция F_x силы **F** на ось x равна взятой с обратным знаком производной от $E_п(x, y, z)$ по x при фиксированных значениях двух других переменных y и z. Аналогично находятся проекции F_y и F_z.

Градиент функции. Получающийся таким образом из скалярной функции $E_п(x, y, z)$ вектор **F** называется *градиентом* этой функции (взятым с обратным знаком). Вектор градиента «смотрит» в направлении наиболее быстрого возрастания функции при изменении координат. Поэтому сила направлена в сторону наиболее быстрого убывания потенциальной энергии. ▲

§ 33. Закон сохранения механической энергии

Перейдем теперь к обсуждению закона сохранения механической энергии. Вернемся к теореме о кинетической энергии, согласно которой изменение кинетической энергии системы частиц при переходе из состояния *1* в состояние *2* равно сумме работ всех действующих сил — внешних и внутренних, как потенциальных, так и непотенциальных. Поделив все действующие силы на потенциальные и непотенциальные, можем написать

$$(E_к)_2 - (E_к)_1 = A_{пот} + A_{непот}. \quad (1)$$

Работа потенциальных сил $A_{пот}$ равна разности значений потенциальной энергии системы в начальном и конечном состояниях:

$$A_{пот} = (E_п)_1 - (E_п)_2. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в теорему (1) о кинетической энергии системы частиц и перегруппировывая слагаемые, получаем

$$(E_к + E_п)_2 - (E_к + E_п)_1 = A_{непот}. \quad (3)$$

Механическая энергия. Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется *механической энергией* (или *полной механической энергией*):

$$E = E_к + E_п. \quad (4)$$

Теперь равенство (3) перепишется в виде

$$E_2 - E_1 = A_{непот}. \quad (5)$$

Равенство (5) означает, что *изменение механической энергии системы равно работе всех непотенциальных сил* (как внешних,

так и внутренних). Это и есть закон изменения механической энергии.

Если непотенциальных сил нет или если их работа равна нулю, механическая энергия системы сохраняется. Обладающие таким свойством физические системы называются *консервативными*. В таких системах возможны лишь взаимные превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас механической энергии системы измениться не может.

Потенциальная энергия системы в общем случае включает в себя потенциальную энергию взаимодействия частиц системы и потенциальную энергию этих частиц во внешнем поле (если оно есть). В некоторых случаях работу внешних потенциальных сил бывает удобно рассматривать явно, а не выражать через изменение потенциальной энергии. В этом случае нужно считать, что потенциальная энергия системы состоит только из энергии взаимодействия составляющих ее частиц. Закон изменения энергии при этом формулируется так: изменение механической энергии системы равно работе всех внешних сил и непотенциальных внутренних сил.

Задачи

1. *Максимальная высота подъема.* Телу на поверхности Земли сообщают скорость v_0, направленную вертикально вверх. На какую наибольшую высоту над поверхностью Земли оно поднимется?

Решение. Эта задача не представляет никаких трудностей, если начальная скорость v_0 мала настолько, что максимальная высота подъема много меньше радиуса Земли. В таком случае действующая на тело сила тяжести постоянна на всем пути, движение происходит с постоянным ускорением $\mathbf{g}$ и максимальная высота подъема определяется известной формулой кинематики $h = v_0^2/(2g)$. Эту формулу можно сразу получить и с помощью закона сохранения энергии. Так как единственная действующая на тело сила (сила тяжести) потенциальна, то полная механическая энергия во все моменты движения одинакова. В начальный момент это только кинетическая энергия $mv_0^2/2$; в точке наибольшего подъема, где скорость обращается в нуль, — это только потенциальная энергия mgh. Приравнивая эти значения, снова получаем $h = v_0^2/(2g)$.

Если же начальная скорость v_0 велика настолько, что не учитывать зависимости силы тяжести от высоты уже нельзя, то решение задачи непосредственно с помощью законов Ньютона наталкивается на серьезные математические трудности. Однако использование закона сохранения энергии позволяет сразу найти интересующую нас максимальную высоту подъема. Все приведенные выше рассуждения справедливы и теперь, только для потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли нужно вместо приближенной формулы $E_п = mgh$ взять точную формулу (6) предыдущего параграфа:

$$E_п(r) = -\frac{mgR^2}{r},$$

учитывая, разумеется, что теперь потенциальную энергию тела на поверхности Земли следует считать равной $-mgR$.

Полагая $r = R + h$ и приравнивая значения механической энергии тела на поверхности Земли и в точке максимального подъема, получаем

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = -\frac{mgR^2}{R+h}. \tag{6}$$

Решая это уравнение относительно h, находим

$$h = R\frac{v_0^2}{2gR - v_0^2}. \tag{7}$$

Если $v_0^2 \ll 2gR$, то вторым слагаемым в знаменателе правой части (7) можно пренебречь и мы сразу приходим к прежнему результату: $h = v_0^2/(2g)$. Можно получить поправку к этому ответу, обусловленную зависимостью силы тяжести от высоты. Используя приближенную формулу $1/(1-x) = 1 + x$ $(x \ll 1)$, из (7) при $v_0^2/(2gR) \ll 1$ получаем

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\frac{1}{1 - v_0^2/(2gR)} = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 + \frac{v_0^2}{2gR}\right). \tag{8}$$

Из формулы (7) видно, что высота подъема неограниченно возрастает, если начальная скорость v_0 приближается к значению $\sqrt{2gR}$. Такая скорость называется *скоростью освобождения* или *второй космической скоростью* V_{II}. Подставляя значения $g = 9{,}81$ м/с^2 и $R = 6370$ км, находим $V_{II} = 11{,}2$ км/с. Если такую скорость сообщить находящемуся вблизи земной поверхности телу, оно навсегда покинет Землю.

2. *Груз на стержне.* Груз, подвешенный на легком стержне длины l, который может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси, отвели из равновесного положения так, что стержень образует с вертикалью угол φ (рис. 119). Какую максимальную скорость v приобретет груз, если его отпустить?

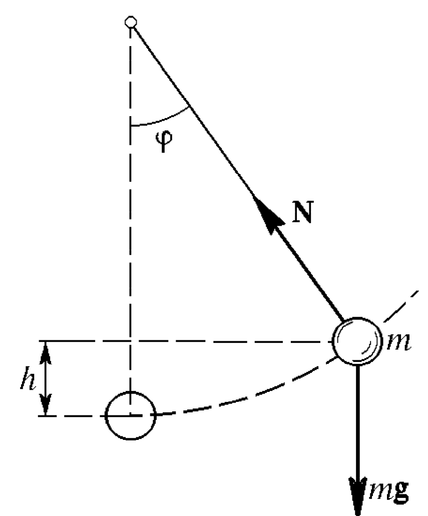


Рис. 119. Силы, действующие на груз, подвешенный на стержне

Решение. В рассматриваемой механической системе на груз при свободном движении действуют только две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила реакции стержня $\mathbf{N}$. Тем не менее динамическое решение этой задачи затруднительно, ибо сила реакции стержня заранее не задана и изменяется в процессе движения. Однако на поставленный в условии задачи вопрос легко ответить, используя закон сохранения механической энергии.

Действительно, данная механическая система консервативна, так как сила тяжести потенциальна, а сила реакции стержня при движении груза работы не совершает, ибо в любой момент направлена перпендикулярно скорости. Поэтому полная механическая энергия системы, включающая кинетическую энергию груза и его потенциальную энергию в поле тяжести, сохраняется. Разумеется, это справедливо, когда можно пренебречь трением.

Очевидно, что кинетическая энергия и, следовательно, скорость груза будут максимальны в той точке траектории, где потенциальная энергия минимальна, т. е. при прохождении положения равновесия. Будем отсчитывать потенциальную энергию груза от этой самой низкой точки. Тогда потенциальная энергия груза при отклонении стержня на угол φ от вертикали равна mgh, где h, как видно из рис. 119, определяется выражением

$$h = l(1 - \cos\varphi). \tag{9}$$

Приравнивая значения потенциальной энергии неподвижного отклоненного груза и его кинетической энергии при прохождении положения равновесия, имеем

$$mgh = mgl(1 - \cos\varphi) = \frac{mv^2}{2}, \tag{10}$$

откуда

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Из выражения (10) видно, что скорость груза в нижней точке будет по модулю такой же, как и при свободном падении с высоты h. Это значит, что роль силы реакции стержня свелась только к изменению направления скорости. Такие силы называют силами реакции идеальных связей.

По своей физической природе сила реакции стержня — это, конечно, упругая сила. Используемая здесь физическая модель, т. е. идеализация свойств стержня, заключается в пренебрежении его возможной деформацией. Другими словами, жесткость стержня считается настолько большой, что при действующих здесь силах деформация практически отсутствует: можно не учитывать изменения длины стержня при подсчете потенциальной энергии груза в поле тяжести и пренебречь потенциальной энергией упругой деформации самого стержня.

Отметим, что использование закона сохранения энергии дает возможность легко получить ответы на некоторые интересующие нас вопросы, но не дает исчерпывающей информации о всем движении. Например, мы не можем с помощью закона сохранения энергии найти зависимость угла отклонения стержня от времени.

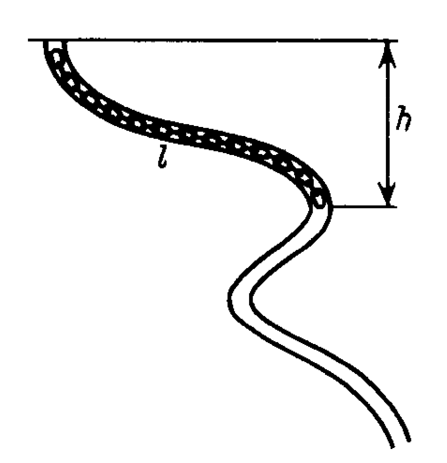


Рис. 120. Цепочка внутри изогнутой гладкой трубки

3. *Цепочка в трубке.* В причудливо изогнутой жесткой трубке с гладкими внутренними стенками находится цепочка длины l, которая может скользить сквозь трубку, не изменяя своей длины (рис. 120). В начальный момент цепочку удерживают, причем ее верхний конец находится на высоте h над нижним. Каким будет ускорение цепочки сразу после того, как ее отпустить?

Решение. Динамическое решение такой задачи требует задания определенной конфигурации трубки. При пренебрежении трением силы реакции трубки можно считать направленными перпендикулярно поверхности в любой ее точке. Другими словами, такая связь является идеальной,

а рассматриваемая механическая система — консервативной. Поэтому можно воспользоваться законом сохранения механической энергии.

Допустим, что отпущенная цепочка сместилась вдоль трубки на малое расстояние Δl. Поскольку скорости всех звеньев цепочки одинаковы, то цепочка приобретет при этом кинетическую энергию

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho l v^2}{2}, \qquad (11)$$

где ρ — масса цепочки в расчете на единицу ее длины (линейная плотность). Эта энергия появилась за счет того, что на такую же величину уменьшилась потенциальная энергия цепочки в поле тяжести. Легко сообразить, что потенциальная энергия цепочки уменьшится на

$$E_п = \Delta m\, gh = \rho\, \Delta l\, gh, \qquad (12)$$

так как это уменьшение связано с тем, что теперь у верхнего конца цепочки на высоте h нет кусочка длины Δl, опустившегося вниз. Приравнивая правые части выражений (11) и (12), получаем

$$\frac{lv^2}{2} = g\, \Delta l. \qquad (13)$$

Если участок Δl выбран настолько малым, что на его протяжении ускорение a можно считать постоянным, то справедлива формула кинематики равноускоренного движения $v^2 = 2a\, \Delta l$. Подставляя это значение v^2 в левую часть (13), находим ускорение а цепочки в начальный момент:

$$a = \frac{gh}{l}. \qquad (14)$$

Заметим, что полученный результат справедлив не только в начальный момент, когда цепочка начинает скользить по трубке. Та же формула (14) дает значение ускорения цепочки для произвольного момента времени, выражая ускорение через разность высот ее верхнего и нижнего концов. Действительно, если при смещении цепочки на Δl ее скорость изменяется от v_0 до v, то закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{\rho l}{2}\left(v^2 - v_0^2\right).$$

Отсюда, учитывая кинематическое соотношение $v^2 - v_0^2 = 2a\, \Delta l$, снова получаем выражение (14): ускорение не зависит от скорости цепочки и определяется только разностью высот ее концов. Когда начало и конец цепочки находятся на одном уровне, ее ускорение равно нулю, как бы причудливо ни была изогнута трубка.

В частном случае прямолинейной трубки формула (14) описывает поведение тела на наклонной плоскости в отсутствие трения: ускорение тела постоянно и равно $g \sin \alpha$, так как отношение h/l равно синусу угла α наклона плоскости к горизонту.

4. *Наклонная плоскость.* Груз массы m медленно втаскивают по наклонной плоскости на высоту h за трос, параллельный наклонной плоскости (рис. 121). Сила натяжения троса совершает при этом некоторую работу A. Какую скорость наберет груз в конце наклонной плоскости, если отпустить трос?

Решение. Очевидно, что заданная в условии задачи работа A не может быть меньше mgh. В противном случае оказался бы нарушенным закон сохранения энергии.

Если $A = mgh$, то система консервативна, трение в ней отсутствует и, спустившись до конца наклонной плоскости, груз наберет такую же по модулю скорость, как и при свободном падении с высоты h: $v = \sqrt{2gh}$. Если $A > mgh$, то механическая система не является консервативной и, применяя к ней закон изменения механической энергии, необходимо учитывать работу сил трения.

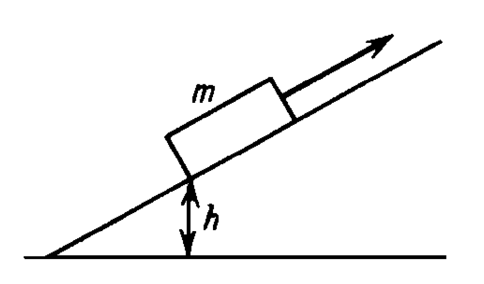


Рис. 121. Груз на наклонной плоскости

Эту задачу можно решить непосредственно с помощью законов динамики, так как все действующие силы здесь постоянны. Однако использование энергетических представлений облегчает получение ответа, делая выкладки более компактными. Запишем сначала закон изменения энергии для подъема груза на высоту h. Так как по условию задачи скорость груза мала, то его кинетической энергией можно пренебречь. Поэтому

$$mgh = A + A_{\text{тр}}. \tag{15}$$

Работа силы трения здесь отрицательна, так как эта сила направлена противоположно перемещению.

Рассмотрим теперь спуск груза. На высоте h груз обладал потенциальной энергией mgh, а в конце, у основания наклонной плоскости, он обладает только кинетической энергией $mv^2/2$. Изменение полной механической энергии груза равно работе сил трения. Эта работа будет такой же, как и при подъеме, ибо здесь такая же по модулю сила трения направлена противоположно перемещению. Поэтому

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = A_{\text{тр}}. \tag{16}$$

Подставляя в (16) $A_{\text{тр}}$ из (15), получаем

$$\frac{mv^2}{2} = 2mgh - A, \text{ т. е. } v = \sqrt{4gh - \frac{2A}{m}}. \tag{17}$$

Обратим внимание на то, что соотношение (17) имеет смысл только при выполнении условия $A > 2mgh$. Поэтому приведенный ответ (17) справедлив, когда

$$mgh \leqslant A < 2mgh.$$

Хотя при $A < mgh$ выражение (17) формально сохраняет смысл, оно дает конечную скорость $v > \sqrt{2gh}$, что невозможно. Подумайте над тем, какой физической картине соответствует случай $A > 2mgh$, для которого ответ (17) теряет смысл.

Задачи для самостоятельного решения

1. От неподвижного груза, висящего на пружине с жесткостью k, отваливается часть, имеющая массу m. На какую высоту поднимется после этого оставшийся груз?

2. В результате трения в верхних слоях атмосферы механическая энергия спутника Земли за много витков уменьшилась на 2%. Орбита спутника при этом как была, так и осталась круговой. Как изменились параметры орбиты: радиус r, скорость v, период обращения T? Потенциальная энергия спутника считается равной нулю на бесконечно большом расстоянии от Земли.

- Что такое механическая энергия системы взаимодействующих частиц? Сформулируйте закон ее изменения.
- Могут ли внутренние силы изменить механическую энергию системы?
- Входит ли в механическую энергию системы взаимодействующих тел потенциальная энергия этих тел во внешнем поле? Как формулируется закон изменения механической энергии при наличии внешних потенциальных сил?
- Как формулируется закон изменения механической энергии системы, если в эту энергию не включена потенциальная энергия тел в заданном внешнем поле?
- При каких условиях механическую систему можно считать консервативной?
- При каких значениях начальной скорости v_0, вычисляя максимальную высоту подъема по формуле $h = v_0^2/(2g)$, мы ошибаемся не более чем на 1%?
- Докажите, что в задаче 4 при $A > 2mgh$ груз останется неподвижно лежать на наклонной плоскости, если отпустить трос.

§ 34. Связь законов сохранения с симметрией пространства и времени

Законы сохранения энергии и импульса, как и законы Ньютона, выполняются в любых инерциальных системах отсчета. Другими словами, эти законы удовлетворяют механическому принципу относительности. Хотя и механическая энергия, и импульс рассматриваемой системы материальных точек имеют разные значения в разных системах отсчета, их изменение во всех инерциальных системах отсчета описывается одними и теми же законами.

В замкнутых механических системах при любых взаимодействиях частиц полный импульс системы сохраняется независимо от того, будут ли внутренние силы потенциальными или непотенциальными. При наличии внешних сил изменение полного импульса системы равно суммарному импульсу этих сил.

В консервативных механических системах сохраняется полная механическая энергия. При наличии непотенциальных сил изменение энергии равно суммарной работе этих сил, как внешних, так и внутренних. Для «истинно механических», замкнутых систем, где нет так называемых диссипативных сил, подобных силам тре-

ния, полная энергия сохраняется. Когда на такую систему действуют внешние силы, изменение ее энергии равно работе этих внешних сил.

Законы сохранения энергии и импульса тесно связаны с определенными свойствами симметрии пространства и времени. Хотя выше они были получены как следствие законов динамики Ньютона, в действительности они представляют собой более общие принципы, область их применения шире и не ограничивается ньютоновской динамикой.

Однородность пространства. Сохранение импульса в замкнутой системе связано с однородностью пространства. Однородность пространства означает, что все явления в замкнутой системе не изменятся, если осуществить параллельный перенос системы из одного места в другое таким образом, чтобы все тела в ней оказались в тех же условиях, в каких они находились в прежнем положении. При таком переносе потенциальная энергия взаимодействия тел, которая, как это следует из однородности пространства, зависит только от их взаимного расположения, остается неизменной. Значит, при переносе всех тел замкнутой системы на один и тот же вектор $\mathbf{R}$ равна нулю работа всех внутренних сил $\mathbf{F}_i$:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{R} = 0.$$

Так как $\mathbf{R}$ — произвольный вектор, одинаковый во всех слагаемых этой суммы, то отсюда следует, что

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \qquad (1)$$

т. е. сумма сил в замкнутой системе равна нулю. Это и есть то условие, при выполнении которого второй закон Ньютона приводит к закону сохранения импульса. В этих рассуждениях третий закон Ньютона уже не используется. Вместо него использовано одно из свойств симметрии пространства — однородность.

Из приведенных рассуждений следует не только закон сохранения полного импульса системы, но и сам третий закон Ньютона для любого взаимодействия двух тел. Действительно, в частном случае системы из двух тел равенство (1) принимает вид $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$, откуда $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Однородность времени. Сохранение энергии в замкнутой системе связано с однородностью времени. Однородность времени заключается в том, что все явления в замкнутой системе при одинаковых начальных условиях будут дальше протекать совершенно одинаково, независимо от того, в какой момент времени эти начальные условия созданы. Это означает, что энергия системы определяется

только ее механическим состоянием, т. е. зависит только от положений и скоростей образующих ее частиц. С течением времени механическое состояние системы изменяется, т. е. радиусы-векторы частиц и их скорости являются функциями времени. Однако энергия системы явно от времени не зависит — вся зависимость энергии замкнутой системы от времени может проистекать только из-за зависимости $\mathbf{r}_i(t)$ и $\mathbf{v}_i(t)$.

Явная зависимость энергии от времени могла бы соответствовать, например, изменению интенсивности гравитационного взаимодействия с течением времени. В этом случае механическая энергия замкнутой системы не сохранялась бы. Однако опыт показывает, что это не так. Если бы по понедельникам гравитационная постоянная была больше своего обычного значения в соответствии с поговоркой: «Понедельник — день тяжелый», то, с легкостью подняв груз на некоторую высоту в субботу или воскресенье, в понедельник можно было бы получить от него бóльшую работу за счет того, что его потенциальная энергия возросла благодаря увеличению гравитационной постоянной. Мы получили бы «вечный двигатель», качающий энергию из времени.

Однородность времени не только приводит к закону сохранения энергии, но и делает возможным сам факт существования науки, устанавливающей объективные законы природы. Справедливость таких законов подтверждается опытами, которые могут быть воспроизведены в любое время, любую эпоху.

Связь пространства и времени. В классической физике представления о пространстве и времени на первый взгляд совершенно независимы друг от друга. Свойство симметрии пространства — его однородность — приводит к закону сохранения импульса замкнутой системы. Аналогичное свойство симметрии времени связано с законом сохранения энергии замкнутой консервативной системы. Однако уже в рамках классической физики связь между понятиями пространства и времени в действительности четко проявляется. А именно, изменение импульса, сохранение которого связано со свойствами пространства, определяется временнóй характеристикой действия силы — ее импульсом $\mathbf{F}\,\Delta t$. И наоборот, изменение энергии, сохранение которой связано со свойствами времени, определяется пространственной характеристикой действия силы — ее работой $\mathbf{F}\,\Delta\mathbf{r}$. В релятивистской физике понятия пространства и времени переплетаются настолько тесно, что можно говорить только о едином физическом пространстве-времени, или о четырехмерном пространственно-временном континууме. Понятия пространства самого по себе и времени самого по себе уже утрачивают физический смысл.

- С какими свойствами симметрии пространства и времени связаны законы сохранения импульса и энергии?

- Покажите, как третий закон Ньютона для взаимодействий любой природы можно обосновать, основываясь на однородности физического пространства.

△ **Сохранение энергии и однородность времени.** Приведенный ранее вывод закона сохранения механической энергии фактически был основан на интегрировании в общем виде уравнений динамики (второго закона Ньютона). Именно так была получена теорема о кинетической энергии. Можно дать другое доказательство закона сохранения энергии, основанное на представлении об однородности времени.

Энергия замкнутой системы является функцией ее механического состояния, т. е. зависит от радиусов-векторов $\mathbf{r}_i$, и импульсов $\mathbf{p}_i$, входящих в систему частиц и не зависит явно от времени: $E = E(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$. Она представляет собой сумму кинетической энергии $E_к(\mathbf{p}_i)$, зависящей от импульсов частиц, и потенциальной энергии $E_п(\mathbf{r}_i)$, зависящей от их положения:

$$E(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) = E_к(\mathbf{p}_i) + E_п(\mathbf{r}_i). \qquad (2)$$

Продифференцируем энергию по времени, учитывая, что $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{p}_i$ меняются со временем:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}\right). \qquad (3)$$

При дальнейшем преобразовании этого выражения учтем, что $d\mathbf{r}_i/dt = \mathbf{v}_i$; $d\mathbf{p}_i/dt = \mathbf{F}_i$ в соответствии со вторым законом Ньютона (здесь $\mathbf{F}_i$ — равнодействующая всех сил, действующих на i-ю частицу); $\partial E/\partial \mathbf{r}_i = \partial E_п/\partial \mathbf{r}_i = -\mathbf{F}_i^{(пот)}$ — градиент потенциальной энергии, определяющий действующую на i-ю частицу потенциальную силу; наконец, $\partial E/\partial \mathbf{p}_i = \partial E_к/\partial \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i/m = \mathbf{v}_i$, что следует из явного выражения для кинетической энергии $E_к = \sum\limits_i p_i^2/(2m_i)$. Подставляя эти соотношения в (3), приходим к равенству

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i (\mathbf{F}_i^{(непот)} \cdot \mathbf{v}_i), \qquad (4)$$

где $\mathbf{F}_i^{(непот)}$ — непотенциальная сила, действующая на i-ю частицу: $\mathbf{F}_i^{(непот)} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^{(пот)}$. Согласно (4) скорость изменения механической энергии замкнутой системы равна мощности действующих в системе непотенциальных сил. При отсутствии таких сил система консервативна и ее механическая энергия сохраняется: $dE/dt = 0$, $E = \mathrm{const}$.

В этом выводе однородность времени проявилась в том, что энергия системы считалась не зависящей от времени явно. В противном случае в правой части выражения (3) появилось бы еще одно слагаемое $\partial E/\partial t$, учитывающее эту зависимость. Мы получили бы $dE/dt \neq 0$, и энергия системы не сохранилась бы.

Симметрия при масштабных преобразованиях. Следствия свойств симметрии не всегда проявляются так наглядно и просто, как в разобранных выше случаях. Симметрия присуща не только пространству и времени, но и самой физической системе. Проявления симметрии могут быть весьма неожиданными и обнаруживать себя в завуалированной форме.

Определенная симметрия характерна и для физических законов, устанавливающих соотношения между характеристиками систем или их изменениями со временем. Она заключается в *инвариантности* (неизменности) законов или выражающих их уравнений при определенных преобразованиях, которым могут быть подвергнуты физические системы. Одним из таких преобразований является так называемое *масштабное преобразование*, при котором координаты и время изменяются в определенное число раз:

$$r \to r' = \alpha r, \quad t \to t' = \beta t, \tag{5}$$

где α и β — заданные числовые множители.

Выясним, как при таком преобразовании координат и времени преобразуется энергия системы, равная сумме кинетической и потенциальной энергий. При неизменной массе кинетическая энергия, пропорциональная квадрату скорости, очевидно, преобразуется следующим образом:

$$E_{\text{к}} \to E'_{\text{к}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 E_{\text{к}}. \tag{6}$$

Чтобы сказать, как преобразуется потенциальная энергия, нужно знать, как она зависит от координат. Напомним, что потенциальные энергии тела в однородном поле тяжести, в ньютоновском поле тяготения и потенциальную энергию упруго деформированной пружины можно записать как определенную функцию координат:

$$E_{\text{п}} = mgh, \quad E_{\text{п}} = -G\,\frac{mM}{r}, \quad E_{\text{п}} = \frac{1}{2}\,k(\Delta l)^2,$$

если для каждой из них выбрать начало отсчета соответствующим образом. Это значит, что зависимость каждой из них от соответствующей координаты r (где под r нужно понимать соответственно h, r или Δl) имеет степенной характер:

$$E_{\text{п}}(r) \propto r^n, \tag{7}$$

где $n = 1$ для однородного поля, $n = -1$ для ньютонова поля тяготения и $n = 2$ для упругой пружины.

Из (7) следует, что любая из приведенных потенциальных энергий преобразуется как

$$E_\text{п} \to E'_\text{п} = \alpha^n E_\text{п}. \tag{8}$$

Легко видеть, что при определенном выборе α и β, таком, что $(\alpha/\beta)^2 = \alpha^n$, т. е. при

$$\beta = \alpha^{1-n/2}, \tag{9}$$

полная механическая энергия преобразуется следующим образом:

$$E \to E' = \alpha^n E. \tag{10}$$

Вот здесь-то и начинается самое интересное.

Физическое подобие. Преобразование энергии (10) при преобразовании координат и времени по формулам (5) можно трактовать просто как изменение масштабов используемых единиц длины и времени в заданной физической системе.

Но это же преобразование (10) можно рассматривать и как преобразование энергии при изменении самой физической системы, считая единицы измерения прежними. Например, можно мысленно увеличить все расстояния в несколько раз. Скажем, можно увеличить вдвое радиус орбиты, по которой планета обращается вокруг Солнца, или втрое увеличить высоту, с которой свободно падает тело в однородном поле тяжести Земли, или вчетверо увеличить растяжение пружины. Если при этом время тоже изменить согласно второй из формул (5), причем коэффициент β выбрать в соответствии с (9), то по виду преобразования энергии (10) мы не сможем определить, которая из упомянутых двух возможностей была реализована.

Симметрия по отношению к этим возможностям трактовки формулы (10) означает, что при реальном изменении линейных размеров физической системы в α раз все характерные времена в ней изменятся в β раз, где $\beta = \alpha^{1-n/2}$ в соответствии с (9): $t'/t = (r'/r)^{1-n/2}$. В частности, при $n = 1$ имеем $t'/t = (r'/r)^{1/2}$: видно, что в однородном поле время падения с вдвое большей высоты будет больше в $\sqrt{2}$ раз. При $n = -1$ имеем $t'/t = (r'/r)^{3/2}$, что соответствует третьему закону Кеплера: квадраты периодов пропорциональны кубам линейных размеров геометрически подобных орбит. При $n = 2$ получаем $t'/t = 1$ — характерное время (период) при колебаниях груза на упругой пружине не зависит от размаха этих колебаний (амплитуды).

Таким образом, использование симметрии физических законов по отношению к масштабным преобразованиям позволяет

найти связь пространственных и временных характеристик движения без обращения к законам динамики.

- В чем проявляется симметрия физических законов по отношению к масштабным преобразованиям?
- Кинооператор снимает сцену взрыва моста на модели в одну десятую натуральной величины. Как следует изменить частоту кадров при съемке, чтобы в кинофильме сцена выглядела правдоподобно? ▲

§ 35. Применение законов сохранения при решении задач

В большинстве практически интересных случаев при решении задач приходится использовать как закон сохранения импульса, так и закон сохранения энергии. В тех случаях, когда ответ удается получить, используя лишь один из этих законов, нужно обязательно выяснить, выполняется ли при этом второй, и если не выполняется, то почему.

Задачи

1. *Диск на пружине.* На пружине жесткости k висит горизонтальный диск массы M, на который с высоты h падает кольцо массы m и прилипает к диску (рис. 122). На какое максимальное расстояние сместится диск из своего первоначального положения?

Решение. Сразу отметим, что одним законом сохранения энергии здесь не обойтись, так как при неупругом ударе кольца о диск, когда оно прилипает к диску, механическая энергия не сохраняется. Тем не менее закон сохранения энергии использовать можно, но только с того момента, как диск с прилипшим к нему кольцом уже движется как одно целое. Их общую скорость V в этот момент можно найти с помощью закона сохранения импульса. Так как в момент удара кольцо, упавшее с высоты h, имеет скорость $v = \sqrt{2gh}$, то

$$m\sqrt{2gh} = (m+M)V.$$

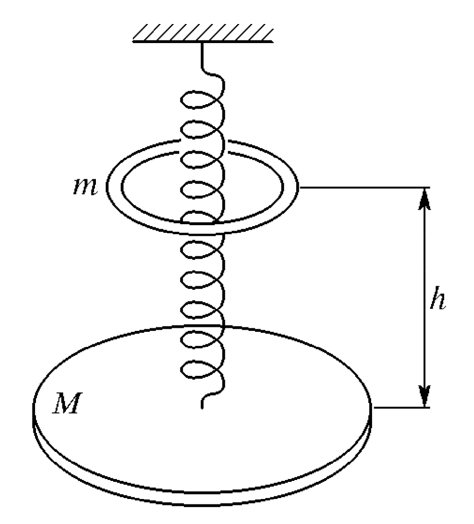


Рис. 122. Колебания диска на пружине

При дальнейшем движении происходят взаимные превращения кинетической и потенциальной энергии, причем здесь потенциальная энергия системы включает в себя потенциальные энергии диска и кольца в поле тяжести Земли и потенциальную энергию упруго деформированной пружины. Составляя уравнение баланса энергии, следует учесть, что в момент удара пружина уже растянута под действием веса диска на $x_0 = Mg/k$ и, следовательно, обладает потенциальной энергией $kx_0^2/2$.

Будем отсчитывать расстояние x вниз от первоначального положения диска. Учитывая, что в момент максимального отклонения вниз скорость диска с кольцом обращается в нуль, имеем

$$\frac{(m+M)V^2}{2}+\frac{kx_0^2}{2}=-(m+M)gx+\frac{k(x+x_0)^2}{2}. \qquad (2)$$

Знак «минус» в члене для потенциальной энергии в поле тяжести связан с выбранным направлением отсчета смещения x. Наличие x_0 во втором слагаемом в правой части соответствует тому, что полное растяжение пружины в крайней точке равно $x+x_0$. Подставляя в (2) V из (1) и значение $x_0=Mg/k$, приходим к квадратному уравнению для x. Решая это уравнение, находим

$$x=\frac{mg}{k}\pm\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{2m^2gh}{k(m+M)}}. \qquad (3)$$

Каков смысл второго (отрицательного) корня в (3)? Легко сообразить, что после прилипания кольца к диску дальнейшее их движение представляет собой колебание около некоторого нового положения равновесия $x_1=mg/k$. Положительный корень дает интересующее нас максимальное смещение диска вниз из начального положения, а отрицательный — максимальное смещение вверх при последующих колебаниях. При этом диск поднимается выше своего первоначального положения. Хотя при составлении уравнения закона сохранения энергии (2) мы не задумывались над возможностью таких колебаний, уравнение автоматически выдало нам второй корень, ибо все, что в него было заложено об интересующей нас точке, — это обращение в нуль скорости, а значит, и кинетической энергии системы. Но скорость обращается в нуль как в нижней, так и в верхней точках максимального отклонения.

Видно, что выражение (3) удовлетворяет очевидному предельному случаю $h=0$: если кольцо просто положить на диск, то, опускаясь вместе с кольцом, он проскочит новое положение равновесия $x_1=mg/k$ на такое же расстояние вниз и затем при колебаниях будет возвращаться до прежней высоты.

Другой интересный предельный случай: $M=0$. В этом случае неупругого удара как такового нет и закон сохранения энергии справедлив для всего процесса в целом, начиная с момента падения кольца с первоначальной высоты h. Учитывая, что при $M=0$ пружина перед ударом не деформирована, имеем

$$mgh=-mgx+\frac{kx^2}{2}.$$

Корни этого уравнения даются формулой (3) при $M=0$.

Переопределение потенциальной энергии. Обратим внимание на то, что в этой задаче фактически можно обойтись без рассмотрения двух видов потенциальной энергии. Дело в том, что действие постоянной силы на пружину, в данном случае веса диска с кольцом, приводит лишь к смещению положения равновесия, не изменяя жесткости k пружины. При этом можно считать, что в системе остается только одна упругая сила, пропорциональная смещению $x-x_1$ из нового положения равновесия, а

сил тяжести уже нет. Соответственно остается только связанная с этой новой упругой силой потенциальная энергия, отсчитываемая от нового положения равновесия. Теперь уравнение баланса энергии записывается в виде

$$\frac{(m+M)V^2}{2}+\frac{kx_1^2}{2}=\frac{k(x-x_1)^2}{2}.$$

что, конечно, совпадает с (2).

Прежде чем перейти к очередной задаче, отметим следующее обстоятельство. Иногда из общих соображений нам удается представить себе качественную картину рассматриваемых в задаче явлений. При этом, однако, может оказаться, что попытки рассчитать движение количественно, исходя из уравнений динамики, наталкиваются на почти непреодолимые математические трудности. Конечно, всегда можно попытаться решить уравнения движения численно с помощью компьютера, но при этом резко сужаются возможности исследования в общем виде разных возможных случаев. Именно здесь и уместно использование законов сохранения.

2. *Соскальзывание с купола.* На вершине полусферического купола радиуса R находится шайба, которая может скользить по поверхности купола без трения. Шайбе толчком сообщают скорость v_0 в горизонтальном направлении. В какой точке купола шайба оторвется от его поверхности?

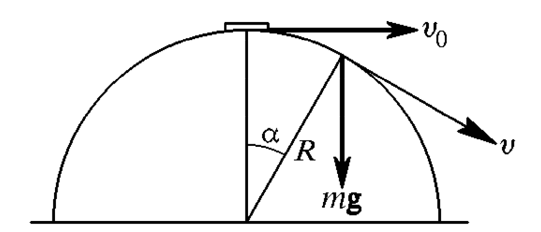


Рис. 123. Соскальзывание шайбы с полусферического купола

Р е ш е н и е. Без всяких вычислений можно убедиться, что шайба обязательно оторвется от поверхности купола. Она не может скользить по поверхности до самого основания даже в том случае, когда начинает сползать с верхней точки купола без начальной скорости. В самом деле, из рис. 123 ясно, что у основания купола скорость шайбы была бы направлена вертикально вниз. Но этого не может быть, ибо горизонтальная составляющая силы реакции $\mathbf{N}$ в течение всего движения по куполу направлена в одну сторону.

Второй закон Ньютона, позволяя так просто выявить качественную картину движения шайбы по куполу, оказывается малопригодным для нахождения движения в аналитическом виде, ибо, как ясно из того же рис. 123, ускорение шайбы непостоянно.

Запишем проекцию уравнения второго закона Ньютона на радиальное направление для момента времени, когда шайба находится на поверхности купола в точке, положение которой задается углом α:

$$mg\cos\alpha - N=\frac{mv^2}{R}. \qquad (4)$$

Отметим, что это уравнение записано в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, причем ось, на которую выполнено проецирование уравнения второго закона Ньютона, неподвижна, хотя и имеет свое направление для каждой точки купола. (Напомним, что с одной и той же инерциальной системой отсчета можно связать сколько угодно различных систем координат.)

Точка отрыва шайбы от купола определяется условием обращения в нуль силы N реакции опоры:

$$N = 0.$$

Поэтому в точке отрыва α_0 из уравнения (4) имеем

$$g \cos \alpha_0 = \frac{v^2}{R}. \qquad (5)$$

Если бы была установлена скорость v в момент отрыва, то выражение (5) и давало бы ответ на вопрос задачи.

Связать скорость шайбы v в любой момент времени с ее положением на куполе можно с помощью закона сохранения энергии, так как в отсутствие трения рассматриваемая механическая система консервативна. Выбирая начало отсчета потенциальной энергии, например, в верхней точке купола, имеем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - mgR(1 - \cos \alpha). \qquad (6)$$

Подставляя сюда v^2 из (5), для точки отрыва получаем

$$\cos \alpha_0 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}. \qquad (7)$$

В частном случае $v_0 = 0$, когда шайба начинает соскальзывать без начальной скорости, $\cos \alpha_0 = 2/3$. Точка отрыва находится на высоте двух третей радиуса от основания купола.

Выражаемый формулой (7) ответ имеет смысл лишь тогда, когда правая часть не превосходит единицы. Для этого начальная скорость v_0 должна удовлетворять условию $v_0^2 \leqslant gR$. При $v_0^2 = gR$ начальная скорость шайбы достаточна для того, чтобы отрыв от поверхности купола произошел сразу в верхней точке. При $v_0^2 \geqslant gR$ выражение (7) уже не имеет смысла, однако ответ совершенно ясен: отрыв шайбы происходит в верхней точке купола (при $\alpha_0 = 0$) и дальнейшее ее движение происходит по параболе, как в случае тела, просто брошенного горизонтально с начальной скоростью v_0. При $v_0^2 = gR$ параболическая траектория имеет в верхней точке такую же кривизну, как и поверхность купола.

Используя закон сохранения энергии для механических систем, где действуют силы трения, следует помнить о том, что их проявление нетривиально и не всегда сводится к уменьшению (диссипации) механической энергии системы. В этом отношении весьма поучительна следующая задача.

3. *На обледенелой горке.* Автомобиль не может стоять на обледеневшем склоне, когда коэффициент трения $\mu < \operatorname{tg} \alpha$. До какой скорости v нужно предварительно разогнать автомобиль, чтобы он мог с разгона подняться по этому склону до высоты h? Если высота горы окажется больше и автомобиль не «дотянет» до ее вершины, то какова будет его скорость, когда он с работающим двигателем сползет вниз и снова окажется у основания горы?

Решение. Действующие на автомобиль силы здесь находятся так же, как и для любого тела на наклонной плоскости: это сила тяжести $m\mathbf{g}$, нормальная сила реакции, модуль которой равен $mg \cos \alpha$, и сила трения, мо-

дуль которой при проскальзывании колес, очевидно, равен $\mu mg \cos\alpha$. Однако здесь эта сила трения ведущих колес о дорогу направлена вверх по склону и при подъеме автомобиля в гору совершает положительную работу.

Хотя при известных силах задачу можно решить динамически, проще сделать это с помощью закона сохранения энергии. Приравняем изменение полной механической энергии за время подъема от подножья горы, где автомобиль имел скорость v, до высоты h, где его скорость обратилась в нуль, работе силы трения $\mu mg \cos\alpha$ на пути $l = h/\sin\alpha$:

$$mgh - \frac{mv^2}{2} = \mu mgh \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (8)$$

Отсюда для квадрата необходимой скорости разгона получаем

$$v^2 = 2gh(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha). \qquad (9)$$

Этот ответ справедлив, разумеется, лишь тогда, когда сила трения не в состоянии удержать автомобиль на склоне, т. е. когда $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. Из ответа (9) видно, что трение ведущих колес о склон действительно помогает преодолеть подъем: при отсутствии трения нужен был бы разгон до скорости $v = \sqrt{2gh}$. Именно это и дает формула (9) при $\mu = 0$. Из этой формулы также видно, что для подъема на одну и ту же высоту h нужна тем большая скорость разгона, чем круче склон. На более пологом склоне и сама сила трения больше, и длиннее перемещение, на котором она совершает положительную работу.

Если автомобиль остановился, не достигнув вершины, то при $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ он будет сползать вниз даже при работающем двигателе. Сила трения пробуксовывающих колес о склон будет теперь совершать отрицательную работу. Скорость v', которую автомобиль будет иметь у основания, снова можно определить с помощью закона сохранения энергии. Так как наверху он имеет только потенциальную энергию mgh, а внизу — только кинетическую $mv'/2$, то

$$\frac{mv'^2}{2} - mgh = -\mu mgh \operatorname{ctg}\alpha \qquad (10)$$

Отсюда для v' находим

$$v'^2 = 2gh(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha). \qquad (11)$$

Сравнивая (11) и (9), замечаем, что скорость v' сползшего со склона автомобиля совпадает со скоростью v, до которой он был разогнан перед началом подъема. Хотя этот результат может показаться и неожиданным, но, немного подумав, можно прийти к выводу, что именно так и должно быть. Более того, в этом можно убедиться из самых общих соображений, вообще не выписывая никаких формул. Дело в том, что в данном случае сила трения ведущих колес о склон не меняет своего направления при изменении направления движения автомобиля. В этом заключается ее принципиальное отличие от обычной силы трения скольжения, направленной противоположно скорости.

В рассматриваемом примере наличие трения эквивалентно дополнительному силовому полю, которое как бы уменьшает направленную вдоль склона составляющую потенциальной силы тяжести. Поэтому при той же начальной скорости автомобиль поднимается по склону на большую высоту, чем в отсутствие трения, а соскользнув назад к подножию, приоб-

ретает ту же скорость, что и перед подъемом. Это, конечно, не означает, что система консервативна и в ней не происходит диссипации механической энергии, т. е. превращения ее в теплоту: пробуксовывающие колеса и поверхность дороги нагреваются. Восполнение потерь механической энергии обеспечивает работающий двигатель.

Отметим, что в этой и в предыдущей задачах закон сохранения импульса не используется. В этих случаях он был бесполезен потому, что во взаимодействии с рассматриваемыми телами участвовало «большое тело» — Земля, которое считалось неподвижным. Изменением кинетической энергии Земли можно было пренебречь из-за ее огромной массы. В то же время участие Земли в рассматриваемых процессах автоматически обеспечивало выполнение закона сохранения импульса для всей системы. Сказанное справедливо в тех случаях, когда используется система отсчета, где Земля неподвижна. Ниже мы подробнее остановимся на вопросе о том, как быть, когда в выбранной системе отсчета Земля движется.

Удачный выбор используемой инерциальной системы отсчета, как и при решении задач кинематики и динамики, может существенно облегчить составление уравнений при использовании законов сохранения. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

4. *Сквозь движущуюся доску.* Пуля массы m, летящая горизонтально со скоростью v_0, пробивает насквозь доску толщины d, которую перемещают с постоянной скоростью u навстречу пуле. При движении внутри доски пуля испытывает действие постоянной силы сопротивления F. С какой скоростью v пуля вылетит из доски?

Решение. Очевидно, что о законе сохранения импульса при решении данной задачи говорить не приходится, ибо по условию доска движется с заданной постоянной скоростью, несмотря на то, что на нее действует сила со стороны пробивающей ее пули. При составлении уравнения баланса энергии следует учитывать только кинетическую энергию пули, ибо потенциальная энергия в поле тяжести при горизонтальном полете неизменна.

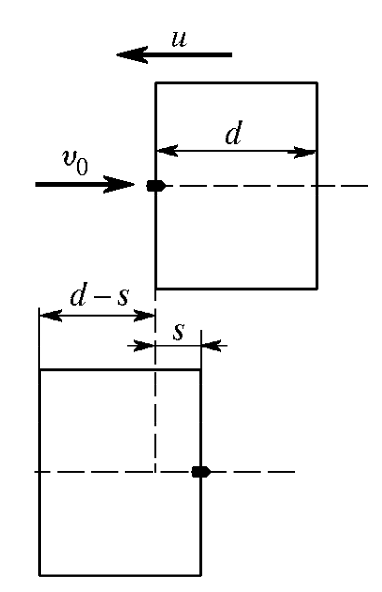


Рис. 124. Пуля пробивает доску, движущуюся навстречу

Изменение кинетической энергии пули при пробивании доски равно работе силы сопротивления F:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -Fs, \qquad (12)$$

где s — модуль перемещения пули в лабораторной инерциальной системе отсчета за то время, пока пуля движется внутри доски и на нее действует сила сопротивления F. Очевидно, что s меньше, чем толщина доски d, поскольку доска движется навстречу пуле. Техническое усложнение при решении этой задачи в лабораторной системе отсчета возникает из-за необходимости определить значение s.

При действии постоянной силы F пуля движется внутри доски с постоянным ускорением. Поэтому средняя скорость пули в доске равна $(v_0 + v)/2$, а время движения — $2s/(v_0 + v)$. Доска за это время проходит

расстояние $d - s$ (рис. 124), двигаясь с постоянной скоростью u. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{2s}{v_0 + v} = \frac{d - s}{u},$$

откуда

$$s = d\,\frac{v_0 + v}{v_0 + v + 2u}.$$

Подставляя это значение в уравнение (12), приходим к квадратному уравнению для искомой скорости v:

$$v^2 + 2uv - v_0^2 - 2v_0 u + \frac{2Fd}{m} = 0.$$

Отсюда находим

$$v = -u \pm \sqrt{(v_0 + u)^2 - \frac{2Fd}{m}}.$$

причем физический смысл имеет только корень

$$v = -u + \sqrt{(v_0 + u)^2 - \frac{2Fd}{m}}. \tag{13}$$

В другой системе отсчета. Решение этой задачи значительно упрощается, если перейти в другую инерциальную систему отсчета, в которой доска неподвижна. В этой системе отсчета скорость пули до встречи с доской равна $v_0 + u$. Путь, проходимый пулей в доске, равен ее толщине d, так как доска неподвижна. Обозначив скорость пули на выходе из доски через v', запишем уравнение баланса энергии в этой системе отсчета:

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{m(v_0 + u)^2}{2} = -Fd. \tag{14}$$

Отсюда

$$v' = \sqrt{(v_0 + u)^2 - \frac{2Fd}{m}}. \tag{15}$$

Для скорости v вылетевшей пули в лабораторной системе отсчета, равной $v = v' - u$, получаем, разумеется, прежнее значение (13).

Обратим внимание на то, что подкоренное выражение в (13) или (15) положительно при условии, что пуля действительно пробивает доску насквозь. Использование удачно выбранной системы отсчета не только упрощает математические выкладки, но и облегчает отбор решений, имеющих физический смысл. Действительно, при переходе от (14) к (15) нам не придет в голову рассматривать отрицательное значение квадратного корня (что соответствовало бы движению пули не от пробитой ею доски, а наоборот, к доске), в то время как при отборе имеющего физический смысл корня (13) квадратного уравнения такой вопрос неизбежно возникает.

5. *Парадокс кинетической энергии.* Два автомобиля движутся по шоссе с одинаковой скоростью v. В некоторый момент один из автомобилей (A) начинает разгон и приобретает скорость v относительно второго автомобиля (B), в то время как второй автомобиль продолжает двигаться с прежней скоростью v относительно Земли. Для наблюдателя, находящего-

ся в автомобиле B, увеличение кинетической энергии автомобиля A равно $mv^2/2$, где m — масса автомобиля. Для наблюдателя, стоящего на земле, кинетическая энергия автомобиля A за время разгона увеличивается от $mv^2/2$ до $m(2v)^2/2 = 4(mv^2/2)$, так что ее приращение составляет $3(mv^2/2)$. Между тем в обеих системах отсчета увеличение кинетической энергии произошло за счет сгорания одного и того же количества бензина. Как объяснить этот парадокс?

Решение. Парадокс возникает только в том случае, когда мы пытаемся связать увеличение кинетической энергии автомобиля с энергетическими затратами, т. е. с расходом топлива. Действительно, увеличение кинетической энергии зависит от выбора системы отсчета, а расход топлива — нет. Если рассматривать происходящий процесс в рамках теоремы о кинетической энергии, согласно которой ее изменение равно совершенной над системой работе, то никакого парадокса нет. В самом деле, предположим для простоты, что разгон происходит с постоянным ускорением a. Тогда в системе отсчета, связанной с Землей, перемещение s_1 автомобиля за время разгона t есть

$$s_1 = (v_{\text{ср}})_1\, t = \frac{1}{2}\,(v + 2v)t = \frac{3}{2}\,vt,$$

а совершаемая разгоняющей автомобиль силой $F = ma$ работа равна

$$A_1 = Fs_1 = \frac{3}{2}\,ma\,vt = \frac{3}{2}\,mv^2.$$

В системе отсчета, связанной с автомобилем B, сила F, очевидно, имеет то же самое значение, а перемещение s_2 автомобиля A уже иное:

$$s_2 = (v_{\text{ср}})_2 t = \frac{1}{2}\,vt,$$

и соответственно работа

$$A_2 = Fs_2 = \frac{1}{2}\,ma\,vt = \frac{1}{2}\,mv^2.$$

Итак, мы видим, что в каждой системе отсчета изменение кинетической энергии равно совершенной работе, хотя сами значения этих величин зависят от выбора системы отсчета.

Почему же при одинаковом расходе топлива совершается разная работа? Подобный парадокс возникает потому, что в приведенных рассуждениях не учитывалась кинетическая энергия Земли и ее изменение при взаимодействии колес разгоняющегося автомобиля с дорогой. Если это изменение учесть аккуратно, то никакого парадокса вообще не возникает и закон сохранения энергии, разумеется, оказывается выполненным.

Выберем сначала систему отсчета, в которой Земля неподвижна, и рассмотрим физическую систему, состоящую из Земли массы M (со всеми находящимися на ней предметами, включая автомобиль B) и разгоняющегося автомобиля A. В этой системе отсчета полный импульс рассматриваемой системы равен mv. Импульс автомобиля B, как и импульсы всех остальных движущихся по Земле автомобилей, поездов и т. д., считаем включенными в импульс Земли, который до разгона автомобиля A равен нулю.

После разгона Земля, испытывая отдачу, приобретает некоторую скорость, проекцию которой на направление движения автомобиля обозначим ΔV_1. Скорость автомобиля A в этой системе отсчета после разгона будет $2v + \Delta V_1$. Убедиться в этом можно следующим образом. По условию задачи A разгоняется до скорости v относительно B, а скорость B относительно Земли не изменилась, т. е. в выбранной системе отсчета стала равной $v + \Delta V_1$. Поэтому скорость автомобиля A, которая еще на v больше, равна $2v + \Delta V_1$.

По закону сохранения импульса

$$mv = M\Delta V_1 + m(2v + \Delta V_1),$$

откуда

$$\Delta V_1 = -v\,\frac{m}{m+M}. \qquad (16)$$

Изменение энергии всей рассматриваемой системы

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}\,M(\Delta V_1)^2 + \frac{1}{2}\,m(2v + \Delta V_1)^2 - \frac{1}{2}\,mv^2. \qquad (17)$$

Подставляя в (17) ΔV_1 из (16), находим

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}\,mv^2\,\frac{3}{1+m/M}. \qquad (18)$$

В другой системе отсчета. Рассмотрим теперь те же процессы в системе отсчета, где вначале автомобили неподвижны. В ней проекция скорости Земли сначала равна $-v$, а потому полный импульс системы есть $-Mv$. После разгона автомобиля A скорость Земли изменится на ΔV_2 и станет равной $-v + \Delta V_2$. Скорость автомобиля A в этой системе отсчета после разгона равна $v + \Delta V_2$. По закону сохранения импульса

$$-Mv = M(-v + \Delta V_2) + m(v + \Delta V_2).$$

Отсюда для ΔV_2 получается то же значение (16), что и для ΔV_1: изменение скоростей, разумеется, одинаково в любой системе отсчета. Изменение энергии ΔE_2 теперь запишется в виде

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}\,M\,(-v + \Delta V_2)^2 + \frac{1}{2}\,m\,(v + \Delta V_2)^2 - \frac{1}{2}\,Mv^2.$$

Подставляя сюда $\Delta V_2 = -vm/(m + M)$, получаем

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}\,mv^2\,\frac{3}{1+m/M}.$$

Видно, что изменение механической энергии всей рассматриваемой системы получается одинаковым независимо от выбора системы отсчета. Таким образом, затраты топлива приводят к увеличению механической энергии всей системы на величину, даваемую формулой (18). В разных системах отсчета эта энергия по-разному распределяется между Землей и разгоняющимся автомобилем. Она почти целиком передается автомобилю в системе отсчета, где Земля неподвижна. Поскольку $m/M \ll 1$, то в этой системе отсчета автомобиль получает энергию $3(mv^2/2)$, что совпадает с приведенным в условии задачи значением, которое сразу получается при пренебрежении отдачей

Земли. В этой системе отсчета действительно можно пренебрегать отдачей Земли, а в других системах отсчета — нельзя, несмотря на то, что изменение скорости Земли всюду одинаково и ничтожно мало, как это видно из (16). Мы еще вернемся к этому парадоксу «большого тела» в связи с задачами космической динамики.

- Почему при решении задачи 1 о падении груза на подвешенный к пружине диск нельзя применить закон сохранения механической энергии ко всему процессу в целом?
- Объясните, каким образом потенциальную энергию груза в поле тяжести можно включить в упругую потенциальную энергию пружины, к которой он подвешен, и не учитывать ее явно в уравнении баланса энергии.
- Объясните подробно, почему в задачах 2 и 3 можно пренебречь изменением кинетической энергии Земли при составлении уравнения баланса энергии и в то же время утверждать, что учет изменения импульса Земли обеспечивает выполнение закона сохранения импульса всей системы.
- Какую роль играют закон сохранения энергии и второй закон Ньютона при решении задачи 2?
- Докажите, что подкоренное выражение в формулах (13) или (15) задачи 4 положительно, если пуля пробивает доску насквозь.
- При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой изменяется не только значение кинетической энергии тела, но и ее изменение в каком-либо процессе. Почему же при таком переходе остается справедливым уравнение, выражающее закон сохранения энергии?

§ 36. Космическая динамика и законы сохранения

Аналитическое решение динамической задачи о движении тела в центральном гравитационном поле, например о движении планет вокруг Солнца или искусственных спутников Земли, сопряжено со значительными математическими трудностями. Между тем ответы на многие вопросы, касающиеся этого движения, можно сравнительно просто получить с помощью законов сохранения.

Вторая космическая скорость. Прежде всего определим вторую космическую скорость V_{II}, т. е. минимальную скорость, которую нужно сообщить находящемуся на поверхности Земли телу для того, чтобы оно удалилось на бесконечность (ее часто называют также *скоростью освобождения*). Для частного случая тела, брошенного вертикально вверх, эта скорость была уже найдена в задаче 1 § 33.

Найдем теперь вторую космическую скорость в общем случае. Проще всего это сделать, используя закон сохранения энергии. Будем

считать, что двигатели ракеты срабатывают непосредственно у поверхности Земли, сообщают ракете необходимую скорость и выключаются. Кинетическая энергия тела при запуске равна $mV_{\text{II}}^2/2$, а потенциальная энергия вблизи поверхности Земли равна $-mgR$. Полная механическая энергия

$$E = \frac{mV_{\text{II}}^2}{2} - mgR$$

в свободном полете остается неизменной. В конечном состоянии, когда ракета удалилась от Земли на бесконечность, ее потенциальная энергия равна нулю. Очевидно, что необходимая начальная скорость будет наименьшей, если в конечном состоянии скорость ракеты обратится в нуль. Следовательно, в конечном состоянии полная механическая энергия равна нулю и вследствие закона сохранения энергии

$$\frac{mV_{\text{II}}^2}{2} - mgR = 0,$$

откуда немедленно получаем

$$V_{\text{II}} = \sqrt{2gh} = 11{,}2 \text{ км/с}. \qquad (1)$$

Ракета удалится на бесконечность независимо от того, в каком направлении сообщена ей вторая космическая скорость, хотя траектории движения при этом, разумеется, будут разными. Но во всех случаях это будут параболы, хотя и с разным положением оси симметрии и крутизной ветвей.

Особенности движения тела в ньютоновском поле тяготения удобнее всего изучать на конкретных примерах. В этом параграфе будет рассмотрено несколько примеров из космической динамики движения спутников в гравитационном поле Земли на основе законов Кеплера и законов сохранения.

Пример 1. *От Земли по разным траекториям.* С полюса Земли запускают две ракеты, одну вертикально вверх, другую горизонтально. Начальные скорости обеих ракет равны v_0, причем v_0 больше первой космической скорости и меньше второй. Выясним, какая из ракет удалится дальше от центра Земли и во сколько раз. Сопротивлением воздуха будем пренебрегать.

Рассмотрим вначале более простой случай, когда ракета запускается вертикально вверх. Поскольку единственная сила, действующая на ракету в свободном полете, есть сила притяжения к Земле, направленная вертикально вниз, то ракета полетит по прямой, проходящей через центр Земли. Так как начальная скорость ракеты меньше второй космической скорости, то ракета на некотором расстоянии r_1 от центра Земли остановится и начнет падать назад. Точку максимального удаления проще всего найти из энергетических соображений. Действительно, так как полная механическая

энергия системы ракета—Земля сохраняется, энергия в начале полета ($mv_0^2/2 - mgR$) равна энергии в точке остановки ($-mgR^2/r_1$). Отсюда сразу находим расстояние максимального удаления от центра Земли:

$$r_1 = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}. \qquad (2)$$

Прежде чем вычислять величину максимального удаления ракеты при горизонтальном запуске, выясним вопрос о форме траектории. Поскольку начальная скорость ракеты превышает первую космическую, но меньше второй, ракета движется по эллипсу, у которого фокус находится в центре Земли, а начальная точка полета является перигеем. Большая ось эллипса проходит через эту точку и центр Земли (рис. 125). Интересующая нас точка наибольшего удаления от центра Земли — апогей — лежит на противоположном конце большой оси, и скорость ракеты v_2 в этой точке, разумеется, отлична от нуля и направлена перпендикулярно большой оси эллипса.

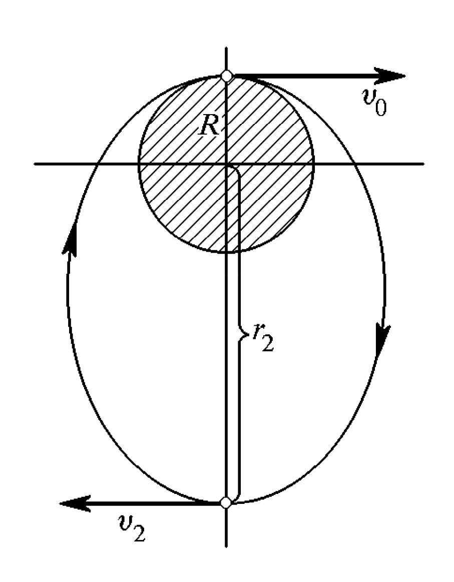


Рис. 125. Эллиптическая орбита при горизонтальном направлении начальной скорости

Для нахождения значения r_2 опять можно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_2}. \qquad (3)$$

Уже отсюда легко увидеть, что максимальное удаление ракеты r_2 в этом случае будет меньше, чем r_1. Уравнение (3) содержит две неизвестные величины v_2 и r_2 и поэтому имеет бесчисленное множество решений. Что бы это могло означать? Перечитав еще раз наши рассуждения, легко заметить, что в уравнение закона сохранения энергии не вошли никакие признаки, которые характеризовали бы точку r_2 как точку наибольшего удаления. Точно такое же уравнение мы получили бы и для любой другой точки траектории. Заметим, что в первом случае (при вертикальном запуске ракеты) точка максимального удаления была уже выделена в уравнении закона сохранения энергии, так как только в этой точке кинетическая энергия ракеты обращается в нуль.

Какое же условие следует добавить к уравнению баланса энергии во втором случае, чтобы учесть особенности точки наибольшего удаления, отличающие ее от всех других точек траектории? Мы уже заметили, что в этой точке скорость перпендикулярна направлению на центр Земли. Точно таким же свойством обладает и на-

чальная точка траектории: по условию начальная скорость ракеты v_0 перпендикулярна направлению на центр Земли. Во всех остальных точках траектории это не так. Этот факт позволяет в простом виде применить второй закон Кеплера о постоянстве секторной скорости при движении в центральном поле:

$$v_0 R = v_2 r_2.$$

Теперь мы имеем систему уравнений для определения v_2 и r_2, причем из наших рассуждений вытекает, что эта система должна иметь два решения, соответствующих перигею и апогею. Легко убедиться, что после подстановки $v_2 = v_0 R/r_2$ уравнение баланса энергии превращается в квадратное уравнение относительно r_2, корни которого равны R и $r_2 = v_0^2 R/(2gR - v_0^2)$. Сравнивая r_2 с r_1, получаем

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2gR}{v_0^2} = \left(\frac{V_{\text{II}}}{v_0}\right)^2 > 1.$$

Обратим внимание на то, что расстояние r_2 от центра Земли до апогея оказалось таким же, как высота максимального подъема над поверхностью Земли тела, брошенного вертикально вверх с такой же скоростью v_0. Это можно увидеть как из формулы (7) § 33, так и из полученного в данной задаче значения r_1, если вычесть из него радиус Земли R.

Такое совпадение не случайно. Вертикальный подъем с последующим падением можно рассматривать как движение по предельно сжатой эллиптической орбите вокруг того же ньютоновского силового центра. Этой сжатой орбите соответствует такая же энергия, как и рассмотренной орбите при горизонтальном запуске, так как в обоих случаях запуск производится с поверхности Земли с одной и той же начальной скоростью. Здесь мы сталкиваемся с частным случаем общей закономерности движения в центральном поле тяготения, согласно которой все замкнутые орбиты с одной и той же энергией представляют собой эллипсы с одинаковыми большими осями. Напомним, что у выродившегося в отрезок прямой эллипса фокусы расположены на концах этого отрезка.

Пример 2. *Маневрирование на орбите.* Два космических корабля движутся вокруг Земли по одной и той же круговой орбите на расстоянии L друг от друга, считая вдоль траектории. Период их обращения равен T. Как сблизить корабли на орбите, если одному из них с помощью двигателя можно практически мгновенно сообщить некоторую дополнительную скорость Δv, малую по сравнению со скоростью движения по орбите и направленную по касательной к траектории? Как требуемая для сближения кораблей скорость Δv выражается через заданные значения L и T?

На рис. 126 показана круговая траектория радиуса r_1, по которой движутся корабли на расстоянии L друг от друга. Если в произвольной точке A кораблю сообщить дополнительную скорость Δv в направлении орбитального движения, то он будет двигаться по эллиптической орбите *1* с фокусом в центре Земли. Период обращения по такой орбите, очевидно, больше, чем по исходной круговой. Если же дополнительную скорость Δv в точке A направить против движения по орбите, то корабль перейдет на эллиптическую орбиту 2, период обращения по которой меньше T.

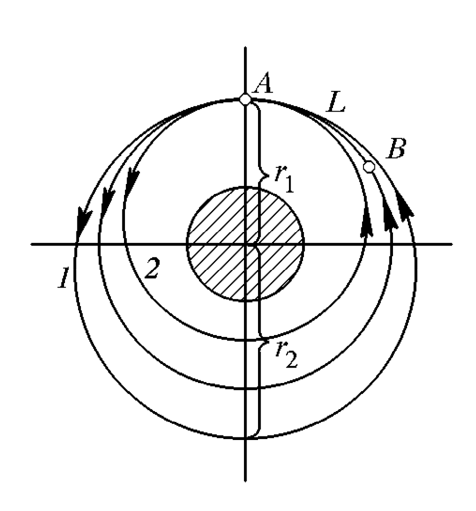


Рис. 126. Маневры для сближения кораблей

Отсюда становится ясно, какие маневры следует выполнить для сближения кораблей. Прежде всего отметим, что поскольку круговая и эллиптические орбиты имеют только одну общую точку A, встреча кораблей может произойти только в этой точке. Поэтому такая встреча может произойти только через промежуток времени после срабатывания двигателя, кратный периоду обращения спутника по эллиптической орбите. Если включается двигатель на корабле, идущем впереди (именно этот случай показан на рис. 126, где второй корабль находится в точке B позади первого), то его нужно разогнать, переводя на орбиту *1*. Если же включается двигатель на втором корабле, идущем сзади, то его нужно тормозить, переводя на орбиту *2*. Обратите внимание на кажущийся парадокс: чтобы догнать, нужно притормозить!

Для определенности рассмотрим первый случай: в момент срабатывания двигателя пассивный корабль находится в точке B, отстоящей на L от точки A. Найдем дополнительную скорость Δv, которую нужно сообщить активному спутнику, чтобы встреча произошла через один оборот. Обозначим через v скорость движения по круговой орбите. Тогда период обращения T_1 по эллиптической орбите должен быть больше периода обращения T по круговой на время прохождения дуги L по круговой орбите:

$$T_1 - T = L/v. \tag{4}$$

Найдем связь между периодом обращения T по эллиптической орбите и той добавочной скоростью Δv, которая переводит спутник на эту орбиту. В этом нам помогут законы Кеплера. На основании третьего закона Кеплера

$$T_1^2 = T^2 \frac{a^3}{r_1^3}, \tag{5}$$

где $a = (r_1 + r_2)/2$ — большая полуось эллипса (рис. 126).

Для того чтобы связать расстояние r_2 от центра Земли до апогея эллиптической орбиты с Δv, воспользуемся вторым законом Кеплера и законом сохранения энергии: обозначив через $v_1 = v + \Delta v$ скорость корабля в перигее, а через v_2 — в апогее эллиптической орбиты, имеем

$$r_1 v_1 = r_2 v_2, \tag{6}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_2}. \tag{7}$$

Здесь m — масса корабля, R — радиус Земли. Выражая v_2 из (6) и подставляя в (7), получаем

$$\frac{1}{2}\, v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = \frac{gR^2}{r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right). \tag{8}$$

Замечая, что gR^2/r_1 есть квадрат скорости корабля на круговой орбите радиуса r_1, из уравнения (8) получаем

$$r_2 = \frac{r_1}{2v^2/v_1^2 - 1}.$$

Отсюда большая полуось эллипса

$$a = \frac{1}{2}\,(r_1 + r_2) = \frac{r_1}{2 - v_1^2/v^2}.$$

Поскольку по условию добавочная скорость Δv много меньше скорости орбитального движения v, то

$$\frac{v_1^2}{v^2} = \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^2 = 1 + 2\,\frac{\Delta v}{v}.$$

Теперь для большой полуоси имеем $a = r_1(1 + 2\Delta v/v)$. Подставим полученное выражение для a в уравнение третьего закона Кеплера (5). Возводя отношение a/r_1 в куб и учитывая, что $\Delta v/v \ll 1$, находим $T_1^2 = T^2(1 + 6\Delta v/v)$, откуда

$$T_1 - T = 3T\,\frac{\Delta v}{v}.$$

Сравнивая это выражение с (4), видим, что

$$\Delta v = \frac{L}{3T}. \tag{9}$$

Итак, если мы хотим, чтобы встреча кораблей произошла через один оборот, то идущему впереди нужно сообщить добавочную скорость Δv, определяемую соотношением (9). Чтобы встреча произошла через n оборотов, нужно сообщить в n раз меньшую доба-

вочную скорость $\Delta v = L/(3nT)$. Таким образом, мы можем израсходовать тем меньше топлива для совершения маневра, чем больше времени согласны ждать встречи. После завершения маневра сближения, для того чтобы перевести корабль снова на круговую орбиту, придется погасить сообщенную ему добавочную скорость, т. е. еще раз включить двигатель.

Второй случай, когда требуется догнать идущий впереди корабль, рассматривается совершенно аналогично и приводит к такому же выражению (9) для Δv.

Пример 3. *Движение метеорита.* На большом расстоянии от Земли метеорит движется относительно нее со скоростью v_0. Если

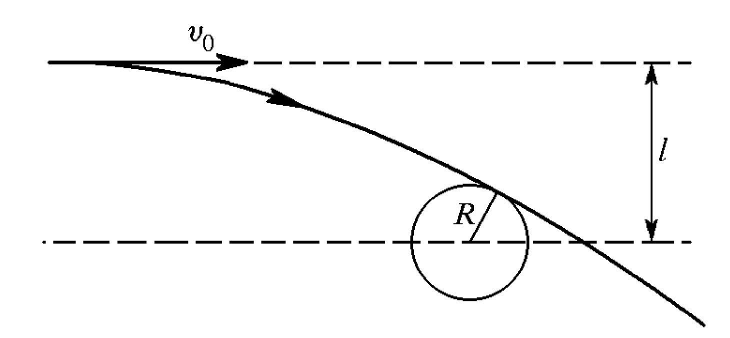


Рис. 127. Траектория метеорита, касающаяся Земли

бы земное притяжение отсутствовало, метеорит прошел бы на расстоянии l от центра Земли (рис. 127). Выясним, при каком наибольшем значении «прицельного» расстояния l метеорит будет захвачен Землей.

На большом расстоянии от Земли, где потенциальную энергию взаимодействия с Землей можно считать равной нулю, метеорит имеет скорость v_0 и его полная энергия равна кинетической $mv_0^2/2$. Если бы начальная скорость метеорита v_0 была равна нулю, то, двигаясь только под действием силы притяжения к Земле, он обязательно упал бы на Землю и при падении имел у поверхности Земли скорость, равную второй космической $V_{\text{II}} = 11{,}2$ км/с, в чем легко убедиться с помощью закона сохранения энергии. Ясно, что траектория метеорита в этом случае — прямая, проходящая через центр Земли.

Если же начальная скорость метеорита отлична от нуля, то он в поле земного тяготения движется по гиперболе и будет захвачен Землей только тогда, когда эта гипербола «заденет» земной шар. Нетрудно сообразить, что при заданном прицельном расстоянии l траектория метеорита будет тем меньше искривлена, чем больше его скорость v_0, так что достаточно быстрые метеориты благополучно минуют Землю. Очевидно, что наименьшей скорости v_0, при которой метеорит еще «проскочит» Землю, соответствует траектория, изображенная на рис. 127. И наоборот, при заданной начальной ско-

рости v_0 эта траектория соответствует наибольшему прицельному расстоянию l, при котором метеорит будет захвачен Землей. Итак, для получения ответа на поставленный вопрос нужно рассмотреть траекторию, касающуюся земного шара.

При движении метеорита в поле тяжести Земли выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - mgR, \qquad (10)$$

где v — скорость метеорита в точке касания, отстоящей от центра Земли на расстояние R. Второй закон Кеплера о постоянстве секторной скорости при движении тела в поле тяжести справедлив и для разомкнутых траекторий. Поэтому приравняем секторные скорости метеорита в бесконечно удаленной от Земли точке и в точке касания:

$$lv_0 = Rv. \qquad (11)$$

Правая часть этого равенства очевидна, поскольку в точке касания вектор скорости **v** перпендикулярен радиусу Земли, а левая часть

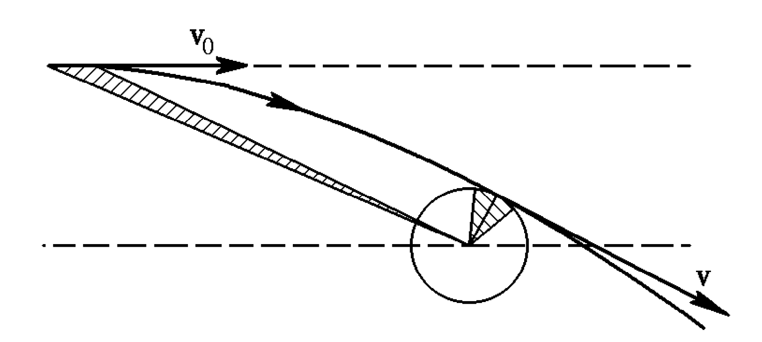


Рис. 128. Применение второго закона Кеплера к движению метеорита

становится очевидной, если посмотреть на рис. 128 и вспомнить, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Подставляя v из уравнения (10) закона сохранения энергии в (11), находим l:

$$l = R\sqrt{1 + \frac{2gR}{v_0^2}} = R\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\text{II}}}{v_0}\right)^2}. \qquad (12)$$

Из полученного ответа видно, что максимальное прицельное расстояние, при котором метеорит будет захвачен Землей, зависит от начальной скорости v_0. Если $v_0 \to 0$, то $l \to \infty$, т. е. первоначально покоившийся относительно Земли метеорит упадет на Землю при любых обстоятельствах (разумеется, это справедливо в предположении, что Солнце и другие планеты практически не влияют на движение метеорита). Если $v_0 \to \infty$, то $l \to R$, т. е. в пределе

бесконечно большой скорости v_0 траектория прямолинейна, так как за малое время пролета метеорита вблизи Земли сила земного притяжения не успевает вызвать заметного изменения импульса метеорита (т. е. искривить его траекторию), и метеорит упадет на Землю только тогда, когда его прицельное расстояние l не превосходит радиуса Земли.

В приведенном примере не учитывалось влияние земной атмосферы на траекторию метеорита. Однако при расчете максимального прицельного расстояния по формуле (12) мы не получим заметной погрешности, так как толщина атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли.

- Что такое вторая космическая скорость? Почему ее иногда называют скоростью освобождения? В каком направлении следует сообщить эту скорость телу вблизи поверхности Земли?
- Чем выделены апогей и перигей среди других точек эллиптической орбиты?
- Объясните качественно, почему космический корабль, для того чтобы догнать через один оборот идущий по той же орбите впереди другой корабль, должен уменьшить свою скорость?
- Может ли прилетевший из бесконечности метеорит стать спутником Земли? Объясните качественно, как траектория метеорита зависит от его скорости вдали Земли.
- На поверхности Земли некоторому телу сообщают начальную скорость, меньшую второй космической. При каком ее направлении тело удалится от Земли на наибольшее расстояние?
- При каком условии периоды обращения спутника по круговой и эллиптической орбитам будут одинаковы?

△ **Космические скорости и движение Земли**. Во всех рассмотренных примерах из космической динамики Земля считалась не подвижной. Точнее, система отсчета, связанная с Землей, считалась инерциальной, а притяжение Солнца и тем более других планет не учитывалось. Однако использовать именно эту систему отсчета совершенно необязательно. Например, гелиоцентрическая система отсчета является инерциальной с большей степенью точности, чем геоцентрическая.

Рассмотрим, например, вопрос о расчете второй космической скорости в гелиоцентрической системе отсчета в том же приближении, что и раньше, т. е. пренебрегая притяжением к Солнцу. Поскольку притяжение к Солнцу не учитывается, Солнце служит лишь телом, с которым связана система отсчета, а не физическим телом, влияющим на движение.

Обозначим скорость движения Земли через $\mathbf{v}$ и предположим для простоты, что находящемуся на поверхности Земли телу сообщают начальную скорость $\mathbf{V}_{\mathrm{II}}$ относительно Земли в направлении,

совпадающем с **v**. Применим закон сохранения энергии, учитывая, что, удалившись от Земли на бесконечность, тело останавливается относительно Земли, т. е. в рассматриваемой гелиоцентрической системе отсчета имеет ту же скорость, что и Земля:

$$\frac{m(V_{\mathrm{II}}+v)^2}{2} - mgR = \frac{mv^2}{2}. \qquad (13)$$

Отсюда находим

$$V_{\mathrm{II}} = \sqrt{2gR + v^2} - v, \qquad (14)$$

что не совпадает с полученным ранее значением $V_{\mathrm{II}} = \sqrt{2gR}$ (см. формулу (1)).

Какому же результату верить? Совершенно очевидно, что формула (14) не может быть верной. В нее входит v — относительная скорость двух использованных систем отсчета. Но так как все инерциальные системы отсчета равноправны, то ответ не может зависеть от v. В чем же дело? В справедливости закона сохранения энергии в данном случае сомневаться не приходится. Выражение для потенциальной энергии во всех инерциальных системах отсчета одинаково. Значит, в уравнении баланса энергии (13) что-то не учтено. Что же именно? Единственное, что мы могли упустить, — это изменение кинетической энергии Земли. В самом деле, при удалении тела от Земли сила тяготения действует не только на тело, но и на Землю, оказывая влияние на ее движение. Правда, изменение кинетической энергии Земли при этом очень мало, ибо ее масса M много больше, чем масса тела m. Тем не менее попробуем учесть его аккуратно.

Обозначая скорость Земли после удаления тела на бесконечность через v_1, запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{m(V_{\mathrm{II}}+v)^2}{2} - mgR = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (15)$$

Скорость тела в конечном состоянии теперь равна v_1, ибо тело, как и раньше, должно быть неподвижно относительно Земли. Скорость v_1 можно найти с помощью закона сохранения импульса, поскольку в отсутствие внешних сил, т. е. в замкнутой системе взаимодействующих тел, полный импульс сохраняется. Поэтому

$$Mv + m(V_{\mathrm{II}} + v) = Mv_1 + mv_1. \qquad (16)$$

Находя v_1 из уравнения (16) и подставляя в (15), получим

$$V_{\mathrm{II}}^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \cdot 2gR. \qquad (17)$$

Это выражение уже гораздо ближе к прежнему результату, чем (14), но все-таки отличается от него лишним множителем $1 + m/M$.

Заметим, что если считать массу тела много меньше массы Земли, т. е. $m/M \ll 1$, то слагаемым m/M можно пренебречь по сравнению с единицей и формула (17) дает прежний результат $V_{\text{II}} = \sqrt{2gR}$. Нетрудно сообразить, что предположение $m/M \to 0$ с самого начала было неявно использовано при решении задачи в системе отсчета, связанной с Землей. Действительно, Земля считалась неподвижной как в начальном, так и в конечном состоянии, несмотря на то, что на нее, как и на тело, действовала сила тяготения. Это возможно, только если $m/M \to 0$.

Итак, выражение (17) является более общим, чем (1). Оно дает возможность определить вторую космическую скорость в том случае, когда массы запускаемого тела и Земли сравнимы между собой. Однако теперь возникает другой вопрос. Почему пренебрежение изменением кинетической энергии Земли (при $m/M \to 0$) в геоцентрической системе отсчета допустимо, а в гелиоцентрической приводит к явно неверному результату (14)? Ведь изменение скорости Земли одинаково в любой инерциальной системе отсчета. В этом легко убедиться, переписав формулу (16) в несколько ином виде:

$$mV_{\text{II}} = (m + M)(v_1 - v). \tag{18}$$

Видно, что изменение скорости Земли $\Delta v = v_1 - v$ не зависит от ее начальной скорости v, т. е. от выбора системы отсчета. Однако изменение кинетической энергии Земли в разных системах отсчета будет разным: в геоцентрической системе это $M(\Delta v)^2/2$, а в гелиоцентрической —

$$\frac{M(v + \Delta v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = Mv\Delta v + \frac{M(\Delta v)^2}{2}. \tag{19}$$

При $m \ll M$, как видно из (18), $\Delta v \ll V_{\text{II}}$. Далее, поскольку скорость v больше второй космической скорости, то первое слагаемое в правой части (19) много больше второго, т. е. изменение кинетической энергии в гелиоцентрической системе много больше этого изменения в геоцентрической и его нельзя не учитывать в уравнении баланса энергии.

Разумеется, формула (17) может быть получена и в геоцентрической системе отсчета, если там учесть изменение кинетической энергии Земли. Разобранный пример поучителен. Он наглядно показывает, с какой осторожностью нужно подходить к вопросу о том, что существенно в рассматриваемом явлении, а чем можно пренебречь. Все инерциальные системы отсчета равноправны в том смысле, что законы природы в них одинаковы. Поэтому при точном решении задачи выбор такой системы безразличен. Однако при нахождении приближенного решения пренебрежения, допустимые в одной системе отсчета, могут оказаться совершенно непригодными в другой.

Третья космическая скорость. Перейдем теперь к определению третьей космической скорости V_{III}, т. е. минимальной скорости, которую нужно сообщить телу вблизи поверхности Земли для того, чтобы оно смогло покинуть пределы Солнечной системы. Будем рассуждать следующим образом. Забудем на время о земном тяготении и найдем минимальную скорость v_1, которую нужно сообщить телу, находящемуся от Солнца на расстоянии r, равном радиусу земной орбиты, чтобы оно смогло преодолеть притяжение Солнца. Эту скорость легко найти, используя закон сохранения энергии.

Поскольку мы пока пренебрегаем полем тяготения Земли, то нужно просто потребовать, чтобы сумма кинетической энергии тела $mv_1^2/2$ и потенциальной энергии в поле тяготения Солнца $-GmM_{\text{C}}/r$ равнялась нулю: тело должно остановиться на бесконечно большом расстоянии от Солнца, где потенциальная энергия обращается в нуль. Отсюда

$$v_1^2 = 2G\,\frac{M_{\text{C}}}{r}. \tag{20}$$

Легко видеть, что эта скорость в $\sqrt{2}$ раз больше скорости Земли на круговой орбите движения вокруг Солнца $v = \sqrt{GM_{\text{C}}/r} = 29{,}8$ км/с. Тело удалится на бесконечность независимо от того, в каком направлении сообщена ему скорость v_1. Итак, v_1 равна приблизительно 42,1 км/с. Это очень много, однако, разумеется, мы можем использовать движение Земли и запустить тело в ту же сторону, куда движется Земля по орбите. Тогда телу нужно сообщить добавочную скорость, равную $(\sqrt{2}-1)v \approx 12{,}3$ км/с.

Теперь нетрудно найти и саму третью космическую скорость. Для этого достаточно только сообразить, что на самом деле скорость 12,3 км/с тело должно иметь после того, как оно преодолеет притяжение к Земле. Поэтому сумма кинетической энергии тела при запуске $mV_{\text{III}}^2/2$ и потенциальной энергии на поверхности Земли $-mgR$ должна равняться кинетической энергии движения со скоростью 12,3 км/с после преодоления земного тяготения:

$$\frac{mV_{\text{III}}^2}{2} - mgR = \frac{m(\sqrt{2}-1)^2v^2}{2},$$

откуда

$$V_{\text{III}}^2 = (\sqrt{2}-1)^2v^2 + 2gR. \tag{21}$$

Этой формуле можно придать другой вид, если вспомнить, что $\sqrt{2gR}$ — это вторая космическая скорость V_{II}:

$$V_{\text{III}}^2 = (\sqrt{2}-1)^2v^2 + V_{\text{II}}^2. \tag{22}$$

Подставляя сюда числовые значения орбитальной скорости Земли $v \approx 29{,}8$ км/с и второй космической скорости $V_{\text{II}} = 11{,}2$ км/с, получаем $V_{\text{III}} \approx 16{,}7$ км/с.

Сохранение энергии и системы отсчета. Итак, ответ получен. Но, возможно, возник вопрос: почему рассуждения проводились в два этапа? Другими словами, почему закон сохранения энергии использовался дважды: сначала для процесса выхода тела из поля тяготения Солнца, а затем для выхода из поля тяготения Земли? Нельзя ли применить закон сохранения энергии один раз ко всему процессу в целом, потребовав, чтобы полная энергия тела, т. е. сумма его кинетической энергии и потенциальных энергий в полях тяготения Земли и Солнца, равнялась нулю:

$$\frac{m(v+V_{\text{III}})^2}{2} - mgR - G\,\frac{mM_{\text{C}}}{r} = 0? \qquad (23)$$

Однако очевидно, что так писать нельзя. Действительно, выразив второе слагаемое в формуле (23) через вторую космическую скорость $V_{\text{II}}^2 = 2gR$, а третье — через скорость Земли на круговой орбите вокруг Солнца $v^2 = GM_{\text{C}}/r$, мы не получим для третьей космической скорости формулы (22). И совершенно понятно почему: в выражении (23) мы не учитывали изменения кинетической энергии Земли при удалении от нее запущенного тела. Хотя это изменение и малó, но, как мы видели в предыдущем примере, учет его в гелиоцентрической системе отсчета необходим.

Учтем изменение кинетической энергии Земли. Разумеется, при этом мы будем пренебрегать изменением кинетической энергии Солнца: как при вычислении второй космической скорости можно было пренебречь изменением кинетической энергии Земли при использовании связанной с ней системы отсчета, так и здесь изменением кинетической энергии Солнца можно пренебречь при использовании гелиоцентрической системы отсчета. Его нужно было бы учитывать, если бы мы использовали какую-нибудь инерциальную систему отсчета, в которой Солнце движется, например систему отсчета, связанную с какой-либо галактикой.

С учетом сказанного закон сохранения энергии в гелиоцентрической системе отсчета следует писать в виде

$$\frac{m(v+V_{\text{III}})^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} - mgR - G\,\frac{mM_{\text{C}}}{r} = \frac{Mv_2^2}{2}. \qquad (24)$$

В этом выражении M — масса Земли, v_2^2 — скорость Земли после удаления тела, а остальные обозначения прежние. Третье и четвертое слагаемые в левой части, как и раньше, выразим соответственно через вторую космическую скорость и скорость

Земли на круговой орбите. Перенесем второе слагаемое из левой части уравнения (24) в правую; тогда в правой части будет стоять изменение кинетической энергии Земли, которое представим в виде

$$\frac{M\,(v_2^2-v)^2}{2}=\frac{M}{2}\,(v_2+v)(v_2-v)\approx Mv(v_2-v). \qquad (25)$$

Поскольку масса тела много меньше массы Земли, то изменение скорости Земли при удалении тела от нее мало́, и сумма v_2+v приближенно заменена на $2v$. Нетрудно сообразить, что это соответствует пренебрежению вторым слагаемым в правой части формулы (19).

Для нахождения изменения скорости Земли $\Delta v=v_2-v$ воспользуемся законом сохранения импульса. Пренебрежем влиянием поля тяготения Солнца на движение Земли и запущенного тела в течение всего времени, которое оно затрачивает на выход из зоны действия земного тяготения. Так как скорость тела при выходе из этой зоны равна v_1, имеем

$$m(v+V_{\text{III}})+Mv=mv_1+Mv_2.$$

Отсюда

$$M(v_2-v)=m(v+V_{\text{III}}-v_1)=m[V_{\text{III}}-(\sqrt{2}-1)v], \qquad (26)$$

так как $v_1=\sqrt{2}\,v$. Обратим внимание на то, что изменение скорости Земли Δv стремится к нулю при $m/M\to 0$, т. е. запуск космических аппаратов практически не влияет на движение самой Земли. Умножая (26) на v, получаем, согласно (25), изменение кинетической энергии Земли. Подставляя это изменение в уравнение баланса энергии (24), приходим к уравнению для определения третьей космической скорости V_{III}:

$$(v+V_{\text{III}})^2-2V_{\text{II}}^2-2v^2=2v\,[V_{\text{III}}-(\sqrt{2}-1)v].$$

Решая это уравнение, находим для V_{III} прежнее значение, даваемое формулой (22).

О задаче трех тел. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Несмотря на то, что закон сохранения энергии (24) был записан для всего процесса в целом, при нахождении изменения скорости Земли нам пришлось воспользоваться законом сохранения импульса в приближенном виде только для определенного этапа процесса, а именно для выхода тела только из зоны действия тяготения Земли. При этом мы считали, что на втором этапе, т. е. при удалении тела из зоны действия солнечного притяжения, скорость Земли уже не менялась по модулю. Таким образом, фактически нам все равно пришлось проводить поэтапное приближенное рассмотрение. Попытка приме-

нить закон сохранения импульса ко всему процессу не привела бы к желаемому результату. Дело в том, что здесь мы сталкиваемся с так называемой задачей трех тел, движущихся под действием сил взаимного притяжения. Точное ее решение возможно лишь в некоторых частных случаях.

При решении практических задач космической динамики обычно используется приближенный подход, основанный на разбиении пространства на так называемые сферы действия отдельных небесных тел. Так, в разобранном примере сначала рассматривалось движение тела только под действием притяжения к Земле. При этом, строго говоря, мы пренебрегаем не влиянием Солнца на движение тела, а разностью во влияниях Солнца на движение Земли и тела, т. е. фактически пренебрегаем неоднородностью поля тяготения Солнца в пределах сферы действия Земли.

После выхода тела из сферы действия Земли рассматривалось его движение только в поле тяготения Солнца. Размер сферы действия Земли определяется тем расстоянием, на котором разность ускорений, сообщаемых Солнцем Земле и запущенному телу, становится сравнимой с ускорением, сообщаемым телу Землей. В отличие от сферы действия «сфера притяжения Земли относительно Солнца», определяемая как область, на границе которой равны по модулю гравитационные ускорения тела от Земли и от Солнца, не играет никакой роли в космической динамике.

- Почему в геоцентрической системе отсчета можно не учитывать влияние спутника на движение Земли, а в гелиоцентрической системе отсчета такой учет необходим?
- В пределах сферы действия Земли можно рассчитывать движение космического аппарата, не учитывая его притяжение другими небесными телами. Чем определяются размеры этой сферы действия? ▲

§ 37. Столкновения частиц

Законы сохранения энергии и импульса часто позволяют гораздо проще получить ответы на некоторые вопросы, связанные с движением тел, чем непосредственное применение законов динамики. Разумеется, информация, получаемая с помощью законов сохранения, не является такой исчерпывающей, как при использовании законов динамики, но зато и получается она гораздо более легким путем. Особенно ценным здесь является то обстоятельство, что зачастую законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда действующие силы неизвестны. Так обстоит дело, например, в физике элементарных частиц.

Законы сохранения энергии и импульса фактически являются единственным средством теоретического изучения процессов столкновения тел, когда характер действующих при столкновении сил неизвестен. Под *столкновениями* в физике понимают самые разнообразные процессы взаимодействия между телами при условии, что на бесконечно большом расстоянии друг от друга тела являются свободными. Когда тела проходят одно мимо другого, они взаимодействуют между собой, и результаты такого взаимодействия могут быть самыми разнообразными: тела могут соединиться вместе в одно тело (абсолютно неупругий удар), в результате соударения могут возникнуть новые тела, может случиться и так, что после взаимодействия тела вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния (абсолютно упругий удар). Столкновения макроскопических тел всегда в той или иной степени являются неупругими, однако в области физики атомных явлений и процессов с элементарными частицами понятие об упругом ударе играет важную роль, так как благодаря дискретному характеру энергетического спектра сталкивающихся частиц их внутреннее состояние либо не меняется вообще (упругий удар), либо скачком изменяется на конечную величину.

Неупругие столкновения. Рассмотрим *абсолютно неупругий удар* двух тел, при котором они соединяются вместе и движутся дальше как одно тело. Слипание вместе пластилиновых шаров, застревание пули в деревянном бруске, захват нейтрона атомным ядром — все это примеры абсолютно неупругого удара. Если сталкивающиеся тела образуют замкнутую систему, в которой действуют только внутренние силы, то полный импульс системы остается неизменным. Это позволяет легко определить скорость тела, образовавшегося в результате неупругого соударения двух тел.

Обозначим скорости тел с массами m_1 и m_2 до удара через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, а скорость образовавшегося при неупругом ударе тела массы $m_1 + m_2$ через $\mathbf{v}$. Тогда, приравнивая полные импульсы до и после удара

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v},$$

получаем

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

Легко видеть, что определяемая формулой (1) скорость $\mathbf{v}$ есть просто скорость движения центра масс сталкивающихся тел, которая, разумеется, в замкнутой системе остается неизменной (см. формулу (3) § 30).

Приведенная масса. При неупругом ударе кинетическая энергия поступательного движения сталкивающихся тел убывает, частично

превращаясь во внутреннюю энергию. Кинетическая энергия поступательного движения тел системы до удара

$$E_к = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

после удара

$$E'_к = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) скорость v из (1) и составляя разность кинетических энергий до и после удара, найдем

$$E_к - E'_к = \frac{1}{2}\,\mu (v_1 - v_2)^2, \qquad (3)$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

— так называемая *приведенная масса* двух тел. По существу (2) есть кинетическая энергия поступательного движения системы как целого, которая в замкнутой системе не меняется, ибо остается неизменной скорость центра масс. Поэтому (3) можно рассматривать как кинетическую энергию относительного движения сталкивающихся частиц, которая при неупругом столкновении превращается в другие виды энергии, например в теплоту.

Упругие столкновения. В отличие от неупругого, при *абсолютно упругом ударе* сохраняется не только импульс, но и механическая энергия, так как внутреннее состояние сталкивающихся частиц после удара остается таким же, каким оно было до удара. Так как частицы до и после столкновения являются свободными, то потенциальная энергия отсутствует, и сохранение механической энергии означает сохранение кинетической энергии сталкивающихся частиц.

При изучении закономерностей упругого столкновения будем для простоты считать, что одна из частиц (массы m_2) до столкновения покоится: $\mathbf{v}_2 = 0$. Назовем эту частицу мишенью, а налетающую частицу с массой m_1 и скоростью $\mathbf{v}_1$ — снарядом. Скорости частиц, разлетающихся после столкновения, обозначим через $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$. Тогда законы сохранения импульса и энергии запишутся в виде

$$m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2, \qquad (5)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \qquad (6)$$

Начнем с некоторых простых частных случаев. Прежде всего рассмотрим «лобовое» столкновение частиц, например шаров, при

котором скорость $\mathbf{v}_1$ направлена по линии, соединяющей их центры. Тогда и скорости шаров после удара будут направлены по этой же линии. Проецируя равенство (5) на это направление, получим скалярное уравнение, которое вместе с (6) образует систему уравнений для нахождения проекций v_1' и v_2' скоростей шаров после удара. Решая ее, находим

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_1. \tag{7}$$

Если массы шаров одинаковы ($m_1 = m_2$), то первый шар при ударе останавливается, а второй шар после удара движется с такой же скоростью, как и первый шар до удара. Если снаряд легче мишени ($m_1 < m_2$), то согласно (7) $v_1' < 0$, т. е. снаряд отскакивает назад, причем при $m_1 \ll m_2$ скорость снаряда просто меняет свое направление на противоположное. Если снаряд тяжелее мишени, то после удара снаряд продолжает двигаться в том же направлении с меньшей скоростью.

Все описанные закономерности легко наблюдать на опыте, изучая столкновения движущихся на воздушной подушке тележек, снабженных упругими пружинными бамперами.

Передача энергии при ударе. Рассматривая изменение кинетической энергии шаров в результате удара, можно убедиться, что в случае равных масс происходит полный обмен энергией, в то время как при большой разнице в массах снаряд при столкновении может передать мишени лишь малую часть своей энергии. В самом деле, пусть, например, снаряд много легче мишени: $m_1 \ll m_2$. Тогда, пренебрегая в знаменателе формулы (7) для v_2' величиной m_1 по сравнению с m_2, получаем $v_2' \approx 2(m_1/m_2)v_1$, откуда для кинетической энергии мишени после удара имеем

$$\frac{m_2 v_2'^2}{2} = 4\,\frac{m_1}{m_2}\,\frac{m_1 v_1^2}{2} \ll \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Аналогичный результат получится и в случае, если снаряд значительно тяжелее мишени ($m_1 \gg m_2$).

В действительности лобовой удар — это большая редкость. Его относительно легко осуществить разве что при игре в бильярд, а при столкновении молекул, атомов и элементарных частиц подавляющее число ударов являются нецентральными.

Если частица налетает на неподвижную частицу такой же массы, то при нецентральном упругом ударе частицы разлетаются под прямым углом друг к другу. Действительно, законы сохранения импульса и энергии (5) и (6) при $m_1 = m_2$ принимают вид

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2', \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Первое из этих равенств означает, что векторы скоростей $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ образуют треугольник, а второе — что для этого треугольника справедлива теорема Пифагора, т. е. он прямоугольный: угол между

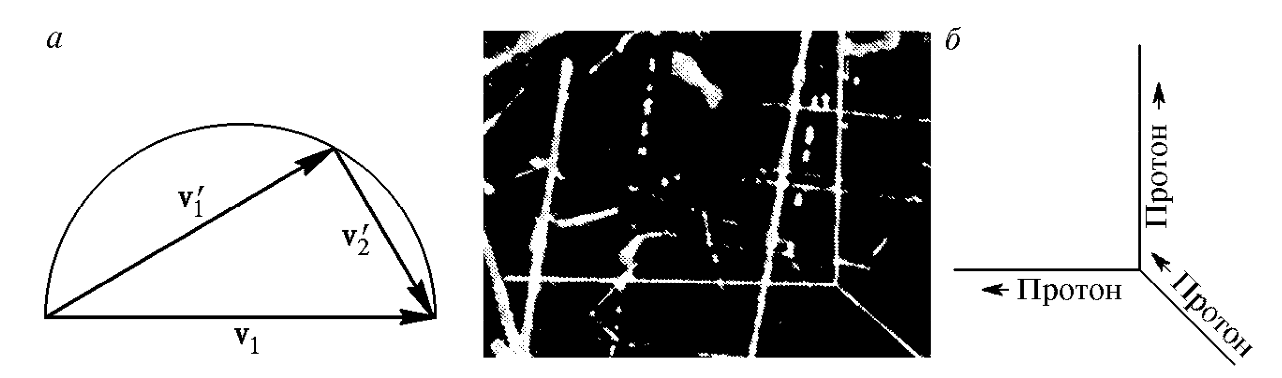


Рис. 129. Векторы $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_1'$ скоростей частиц с одинаковыми массами, разлетающихся после упругого удаоа, направлены под прямым углом друг к другу (*а*); треки в пузырьковой камере (или камере Вильсона) при столкновении быстрого протона с неподвижным (*б*)

катетами $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ равен $\pi/2$ (рис. 129*а*). Однако законов сохранения энергии и импульса недостаточно для определения направления векторов $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ относительно направления движения налетающей частицы. Для того чтобы определить эти направления, нужно знать закон взаимодействия между частицами и их взаимное положение в момент столкновения.

Система центра масс. В общем случае частиц с разными массами применение законов сохранения к изучению процесса столкновения удобно интерпретировать геометрически. Для этого перейдем из лабораторной инерциальной системы отсчета, в которой частица-мишень до столкновения покоится, в другую инерциальную систему отсчета, в которой центр масс сталкивающихся частиц покоится как до столкновения, так и после. Эта система отсчета движется относительно лабораторной с такой же скоростью, как и центр масс:

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_1,$$

так как мишень до столкновения в лабораторной системе отсчета покоится ($\mathbf{v}_2 = 0$).

В системе центра масс движутся обе частицы — как снаряд, так и мишень. Их импульсы, равны по модулю и противоположны по направлению, так что полный импульс сталкивающихся частиц в этой системе отсчета равен нулю.

В силу закона сохранения импульса импульсы обеих частиц остаются равными по модулю и противоположными по направлению

и после столкновения, а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными и их модули. Тем самым в системе центра масс столкновение сводится к повороту скоростей обеих частиц, остающихся противоположно направленными и неизменными по модулю. Это изображено на рис. 130, где векторы скоростей с индексом

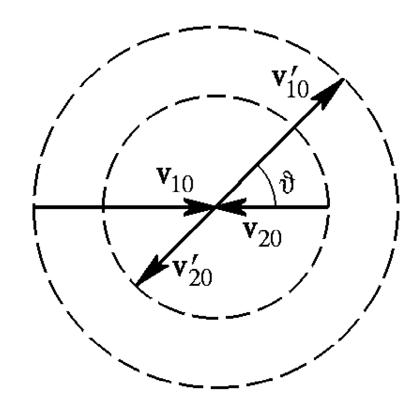


Рис. 130. Векторы скоростей частиц до и после столкновения в системе цантра масс

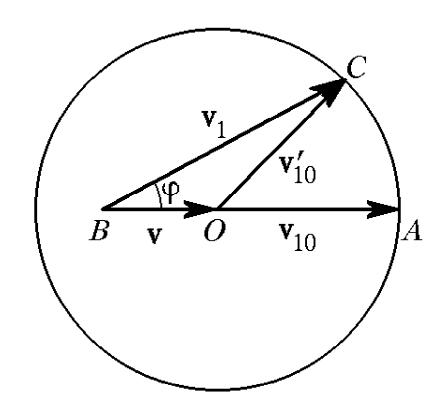


Рис. 131. Построение вектора $\mathbf{v}_1'$ скорости первой частицы после столкновения в лабораторной системе отсчета

«0» относятся к системе центра масс. Угол ϑ в зависимости от взаимного расположения частиц при столкновении может принимать любые значения. Его значение не может быть найдено только из законов сохранения.

Угол рассеяния. Скорость частиц в лабораторной системе отсчета можно получить из рис. 130 следующим графическим построением. Отложим вектор $\overrightarrow{OA}$, равный скорости снаряда в системе центра масс до удара $\mathbf{v}_{10}$ (рис. 131). Скорость снаряда в лабораторной системе $\mathbf{v}_1$ равна сумме $\mathbf{v}_{10}$ и скорости центра масс $\mathbf{v}$, т. е. изображается вектором $\overrightarrow{BA}$ на рис. 131. После столкновения скорость снаряда в системе центра масс $\mathbf{v}'_{10}$ имеет такой же модуль, что и v_{10}, и, следовательно, изображается некоторым вектором $\overrightarrow{OC}$, конец которого лежит в какой-то точке окружности радиусом v_{10} с центром в точке O. Поэтому в лабораторной системе отсчета скорость $\mathbf{v}_1'$ частицы-снаряда после удара, равная векторной сумме $\mathbf{v}'_{10}$ и скорости $\mathbf{v}$ центра масс, изображается вектором $\overrightarrow{BC}$. Угол φ характеризует изменение направления скорости снаряда в лабораторной системе в результате столкновения. Он называется *углом рассеяния*.

Модуль вектора $\overrightarrow{BA}$ равен v_1, а модуль вектора $\overrightarrow{BO}$ равен $v = m_1 v_1/(m_1 + m_2)$, поэтому модуль вектора $\overrightarrow{OA}$ есть $v_{10} = v_1 - v = m_2 v_1/(m_1 + m_2)$. Рис. 131 соответствует случаю $m_1 < m_2$,

т. е. когда снаряд легче мишени. Так как точка B лежит при этом внутри окружности, то угол рассеяния снаряда φ может принимать любые значения. Если снаряд тяжелее мишени ($m_1 > m_2$), то точка B находится вне окружности (рис. 132). Видно, что в этом случае угол рассеяния частицы-снаряда φ не может превышать некоторого максимального значения φ_{max}, синус которого равен отношению v_{10}/v:

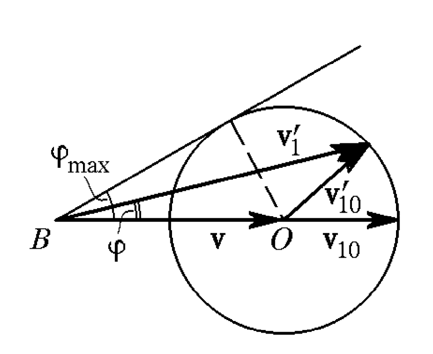


Рис. 132. Максимальный угол рассеяния φ_{max} при $m_1 > m_2$

$$\sin \varphi_{max} = \frac{v_{10}}{v} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Например, при упругом рассеянии дейтронов на неподвижных протонах, когда отношение $m_2/m_1 = 1/2$, угол рассеяния не может превышать 30°.

Угол разлета. Наряду с углом рассеяния φ, характеризующим отклонение направления движения частицы-снаряда от первоначального направления, представляет интерес также и угол α, под которым разлетаются частицы после столкновения. Он называется *углом разлета.* В системе центра масс он, очевидно, всегда равен π — частицы разлетаются в противоположные стороны. Выполнив построение еще и вектора скорости $\mathbf{v}_2'$ частицы-мишени после столкновения, легко увидеть ограничения, которые накладываются законами сохранения энергии и импульса на значения этого угла в лабораторной системе.

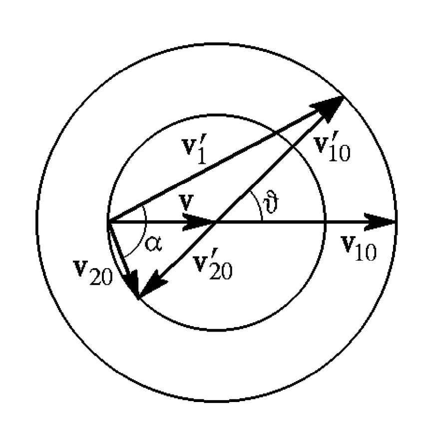


Рис. 133. В случае $m_1 < m_2$ частицы после столкновения разлетаются под углом, превышающим $\pi/2$

На рис. 133 такое построение выполнено для случая $m_1 < m_2$. Видно, что в зависимости от угла ϑ, характеризующего поворот векторов скоростей в системе центра масс, угол разлета α может принимать различные значения, которые, однако, всегда превышают $\pi/2$, — векторы скоростей разлетающихся частиц образуют тупой угол. В случае, когда снаряд тяжелее мишени ($m_1 > m_2$), частицы разлетаются после столкновения под острым углом.

Полученные с помощью законов сохранения закономерности процессов столкновений остаются в силе и для тех случаев, когда рассматриваемая система сталкивающихся частиц, строго говоря, не является замкнутой. Необходимо лишь, чтобы внешние силы были малы по сравнению с внутренними силами, действующими во время

столкновения. Тогда импульсом внешних сил за время столкновения можно пренебречь. Например, магнитное поле в камере Вильсона существенно искривляет траектории заряженных частиц до и после столкновения, однако во время столкновения действием магнитного поля можно пренебречь.

Обратимость упругих столкновений. Упругие столкновения частиц, в частности столкновения молекул, обладают замечательным свойством обратимости, присущим всем консервативным системам. Представим себе, что процесс упругого соударения заснят на кинопленку. При просмотре фильма мы увидим, что частицы («молекулы») сначала сталкиваются, а затем разлетаются. Пустим теперь кинопленку в проекторе «задом наперед», т. е. в обратном направлении. Мы увидим, как частицы сходятся по траекториям, по которым они на самом деле разлетались, а затем, столкнувшись, разлетаются по траекториям, по которым они сходились. Здесь все будет происходить по тем же законам, что и в настоящем столкновении. Если заранее не знать, что пленка пущена вспять, т. е. время «обращено», то определить это с помощью законов физики не удастся. Особенно наглядно это проявляется на рисунках, где упругое столкновение изображено в системе центра масс, например на рис. 130.

Отбор нужных решений. Как уже отмечалось, применение законов сохранения энергии и импульса к процессам столкновений позволяет получить ответы на некоторые вопросы даже в тех случаях, когда неизвестен закон, описывающий силы взаимодействия между частицами. Это возможно потому, что уравнения законов сохранения фактически отражают не динамику происходящих процессов, а лишь баланс некоторых физических величин, т. е. своего рода «бухгалтерию», учитывающую «доходы» и «расходы». Поэтому при интерпретации полученных из законов сохранения результатов, как правило, необходим тщательный отбор решений, имеющих физический смысл, т. е. соответствующих именно тем процессам, которые фигурируют в условии задачи. Дело в том, что одни и те же уравнения законов сохранения могут соответствовать разным физическим процессам, и поскольку этим уравнениям «невдомек», какой именно из этих процессов нас интересует, то они и «выдают» ответы для всех мыслимых случаев. Обратите внимание на это обстоятельство при разборе приводимых ниже задач.

Задачи

1. *Столкновение альфа-частицы с протоном.* Во сколько раз уменьшится скорость альфа-частицы после центрального упругого удара о неподвижный протон, масса которого m_2 в четыре раза меньше массы m_1 альфа частицы?

Решение. При нахождении интересующего нас отношения скоростей нет необходимости в детальном описании самого процесса столкновения. Скорость альфа-частицы после того, как сталкивающиеся частицы разлетелись, может быть найдена с помощью законов сохранения. Условие задачи позволяет записать уравнения законов сохранения импульса и энергии в следующем виде:

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2, \tag{8}$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \tag{9}$$

где v — скорость налетающей альфа-частицы, а v_1 и v_2 — скорости альфа-частицы и протона после того, как они разлетелись. Учитывая, что отношение масс $m_1/m_2 = 4$, перепишем их так:

$$4v = 4v_1 + v_2, \tag{10}$$

$$4v^2 = 4v_1^2 + v_2^2. \tag{11}$$

Для нахождения искомого отношения скоростей $x = v/v_1$ необходимо прежде всего исключить v_2 из системы уравнений (10), (11). Если сделать это стандартным способом, подставив v_2 из (10) в (11), получим для x квадратное уравнение:

$$3x^2 - 8x + 5 = 0.$$

Оно имеет два корня: $x = 1$ и $x = 5/3$. Описываемому в условии задачи процессу лобового удара соответствует только второй корень $x = 5/3$. Корень $x = 1$ соответствует случаю, когда альфа-частица просто пролетает далеко в стороне от неподвижного протона, не взаимодействуя с ним. Конечно, такой процесс тривиален и не представляет для нас интереса, но уравнения законов сохранения для него выглядят точно так же, как и уравнения (8), (9) для лобового удара: в обоих случаях скорости частиц после «удара» направлены вдоль той же прямой, что и скорость налетающей альфа-частицы. Поэтому алгебра просто «обязана» выдать такой корень.

О физическом смысле корней уравнения. Строго говоря, оба корня квадратного уравнения (12) соответствуют еще и обратным процессам. Для корня $x = 1$ обратный процесс заключается просто в том, что альфа-частица пролетает вдали от неподвижного протона в противоположном направлении. Обратный процесс для корня $x = 5/3$ состоит в том, что протон догоняет альфа-частицу, движущуюся в ту же сторону, что и он, и после лобового удара останавливается. При этом альфа-частица продолжает движение с большей скоростью.

Избежать появления корня $x = 1$ можно, если с самого начала учесть, что после удара скорость альфа-частицы должна измениться: $v \neq v_1$. Для этого можно переписать уравнение (11) в виде

$$4(v + v_1)(v - v_1) = v_2^2$$

и разделить его почленно на уравнение (10), записанное в виде

$$4(v - v_1) = v_2,$$

что допустимо при $v \neq v_1$. В результате получим

$$v + v_1 = v_2. \tag{13}$$

Теперь система линейных уравнений (10) и (13) имеет только один корень для $x = v/v_1$. Решая эту систему, получаем $x = 5/3$.

2. *Лобовой удар*. В момент наибольшего сближения частиц при упругом лобовом столкновении их скорости одинаковы и равны $\mathbf{v}$. Каковы скорости этих частиц после разлета, если до столкновения они двигались со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$? Чему равно отношение их масс?

Решение. Поскольку по условию задачи удар лобовой, то векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в лабораторной системе отсчета направлены вдоль одной прямой. Будем обозначать проекции всех скоростей на эту прямую соответствующими буквами без стрелок. В лабораторной системе отсчета не представляет труда записать уравнения закона сохранения импульса и энергии. Поскольку закон сохранения импульса справедлив для всех этапов процесса столкновения, то можно записать два уравнения, смысл которых очевиден:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v, \tag{14}$$

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1' + m_2v_2'. \tag{15}$$

Кинетическая энергия частиц имеет одно и то же значение только перед столкновением и после разлета. При сближении частиц кинетическая энергия частично превращается в потенциальную энергию их взаимодействия, которая при упругом столкновении затем снова превращается в кинетическую. Поэтому для закона сохранения энергии в данном случае можно написать лишь одно уравнение:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}. \tag{16}$$

Обратим внимание на то, что в систему трех уравнений (14)—(16) фактически входит только отношение масс частиц $\gamma = m_1/m_2$. Поэтому из нее можно найти все три неизвестные величины. Благодаря симметрии этой системы уравнений относительно замены начальных скоростей v_1 и v_2 на конечные v_1' и v_2' (что отражает обратимость во времени процесса упругого столкновения) сразу видно, что у нее есть решение $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$, а γ произвольное. Это решение, очевидно, не представляет интереса, так как не отвечает процессу лобового столкновения. Нахождение имеющего смысл решения связано с довольно громоздкими алгебраическими преобразованиями. Проделайте их самостоятельно и убедитесь, что в результате получится

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} = \frac{v - v_2}{v_1 - v}, \quad v_1' = 2v - v_1, \quad v_2' = 2v - v_2. \tag{17}$$

Поскольку $\gamma > 0$, задаваемые в условии значения скоростей должны удовлетворять условию $v_1 < v < v_2$ или $v_1 > v > v_2$.

В системе центра масс. К ответу можно прийти без утомительных алгебраических выкладок, если решать задачу в системе центра масс.

Уравнение (14) закона сохранения импульса фактически говорит о том, что скорость v представляет собой скорость движения центра масс частиц в лабораторной системе отсчета, а уравнение (15) — о том, что эта скорость остается такой же и после столкновения. Очевидно, что скорости частиц в системе центра масс до столкновения равны $v_1 - v$ и $v_2 - v$. Так как в системе центра масс в результате лобового столкновения скорости частиц просто меняют свои направления на противоположные, то после столкновения скорости частиц равны $v - v_1$ и $v - v_2$. Чтобы найти теперь их значения в лабораторной системе отсчета, к каждой из них, очевидно, нужно прибавить скорость v центра масс. В результате получаем $v_1' = 2v - v_1$ и $v_2' = 2v - v_2$.

Обратим внимание на то, что при проведении рассуждений в системе центра масс нам не пришлось явно использовать значение отношения масс частиц γ. Для ответа на соответствующий вопрос задачи его проще всего выразить через v, v_1 и v_2 из уравнения (14).

3. *Столкновение автомобилей.* Примером неупругого удара может служить столкновение автомобилей. Абсолютно неупругому удару соответствует случай, когда столкнувшиеся искореженные автомобили «сцепляются» друг с другом. Почему при лобовом столкновении тяжелого грузовика с легковым автомобилем гораздо большей опасности подвергаются пассажиры легкового автомобиля? Оцените, какие перегрузки испытывают пассажиры легкового автомобиля и водитель грузового.

Решение. Рассматривая такое столкновение, можно не учитывать взаимодействие автомобилей с покрытием дороги, так как силы сцепления колес с дорогой гораздо меньше сил, возникающих при деформации автомобилей. Другими словами, в этой задаче систему можно считать замкнутой, как если бы все это происходило на обледенелой дороге. Силы взаимодействия колес с дорогой определяют лишь время, в течение которого сцепившиеся автомобили продолжают двигаться до полной остановки. Но для ответа на вопросы задачи важно отнюдь не это время, а время, в течение которого выравниваются скорости сталкивающихся автомобилей.

Попробуем оценить это время. Предположим, что грузовик двигался со скоростью 60 км/ч, а легковой даже медленнее — со скоростью 40 км/ч. Обычно при лобовом ударе сильно деформированной оказывается передняя часть автомобиля, занятая мотором. Поэтому для оценки можно принять, что в результате столкновения автомобили «укорачиваются» на 1 м. Относительная скорость v автомобилей перед ударом была 100 км/ч, а после неупругого удара она стала равной нулю. Принимая для простоты, что автомобили замедлялись с постоянным ускорением, найдем необходимое для этого время:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{\text{ср}}} = \frac{\Delta x}{v/2} = \frac{1\ \text{м}}{50\ \text{км/ч}} = 0{,}07\ \text{с}.$$

Дальнейшие рассуждения удобно проводить в системе отсчета, связанной с центром масс автомобилей, так как скорость центра масс за время удара $\Delta t = 0{,}07$ с практически не меняется. В этой системе отсчета после удара автомобили неподвижны. Их скорости $v_{\text{г}}$ и $v_{\text{л}}$ до удара зависят не от того насколько быстро двигался каждый из них относительно земли, а от их относительной скорости v (100 км/ч) и отношения их масс

$\gamma = M/m$. Очевидно, что

$$v_\text{г} = v\,\frac{m}{m+M} = v\,\frac{1}{\gamma+1}, \quad v_\text{л} = v\,\frac{M}{m+M} = v\,\frac{\gamma}{\gamma+1}. \tag{18}$$

В справедливости этих выражений можно убедиться, учитывая, что модули импульсов автомобилей в системе центра масс одинаковы. Если различие в массах велико, так что $\gamma \gg 1$, то $v_\text{л} \gg v_\text{г}$, причем скорость $v_\text{л}$ легкового автомобиля практически совпадает с относительной скоростью v (хотя относительно дороги легковой автомобиль движется медленнее грузовика!).

Отсюда видно, что ускорение у легкового автомобиля при ударе будет гораздо больше, чем у грузовика, так как скорости $v_\text{г}$, и $v_\text{л}$ обращаются в нуль за одно и то же время Δt. Поэтому и перегрузки, которым подвергаются привязанные ремнями пассажиры, в легковом автомобиле гораздо больше, чем в грузовике. Если, например, $\gamma = 10$, то ускорение грузовика $a_\text{г} = v_\text{г}/\Delta t = 35$ м/с$^2 = 4g$, а ускорение легкового автомобиля $a_\text{л} = v_\text{л}/\Delta t = 40g$. Как видим, даже привязанные пассажиры легкового автомобиля испытывают весьма ощутимые перегрузки.

Роль привязных ремней. Еще большей опасности подвергаются пассажиры, когда привязные ремни не надеты. В этом случае пассажир не почувствует никакой силы, пока не ударится о приборный щиток или ветровое стекло. В результате ему придется остановиться не за $\Delta t = 0{,}07$ с, а за еще более короткое время, если только он не вылетит вперед, выбив ветровое стекло. Пассажира травмирует отнюдь не само столкновение автомобиля с препятствием, а второе столкновение, когда он налетает на внутреннее оборудование автомобиля. Автомобили уже почти прекращают свое относительное движение, когда непристегнутый пассажир врезается в приборный щиток. Расстояние, на котором замедляется пассажир, а тем самым и время его остановки в несколько раз меньше, чем у автомобилей. Поэтому и действующая на пассажира останавливающая сила в несколько раз больше, чем в случае надетых привязных ремней, да и приложена она, оказывается, в случайном, не самом подходящем месте — о ветровое стекло обычно ударяются головой.

- Вещество для замедления нейтронов в ядерных реакторах должно быть таким, чтобы его ядра не поглощали нейтронов. В частности, свинец и тяжелая вода почти не поглощают нейтроны. Почему же для замедления быстрых нейтронов используют дорогую тяжелую воду и не используют гораздо более дешевый свинец?
- Какие ограничения накладывают законы сохранения на угол рассеяния и на угол разлета при упругом столкновении движущейся частицы с неподвижной?
- Выполните построение векторов скоростей $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ частиц в лабораторной системе отсчета после столкновения для случая $m_1 > m_2$ и докажите, что угол разлета при этом всегда острый ($\alpha < \pi/2$).
- Почему при решении задачи 2 в системе центра масс не появляются посторонние решения $v_1' = v_1$ и $v_2' = v_2$?
- При неупругом ударе, например при лобовом столкновении автомобилей, кинетическая энергия частично идет на совершение работы по их

деформации. Докажите, что при большом различии масс автомобилей эта «потерянная» энергия практически совпадает с первоначальной кинетической энергией легкого автомобиля.

§ 38. Фазовая плоскость. Адиабатические инварианты

Наглядное представление об общем характере движения механической системы дают так называемые *фазовые диаграммы*.

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, положение которой полностью определяется заданием единственной координаты. Это может быть координата точки на оси или на кривой при одномерном движении (т. е. движении по заданной траектории), угол отклонения от вертикали стержня, который может поворачиваться вокруг оси, и т. д. Механическое состояние такой системы определяется заданием двух величин — координаты и импульса (или скорости). Для описания движения таких систем используются графики, изображающие зависимость координаты от времени и скорости от времени. Наряду с ними можно рассматривать график зависимости импульса (или скорости) от координаты. Этот график легко построить, отталкиваясь от графиков $x(t)$ и $v(t)$.

Фазовые траектории. Введем на плоскости систему координат и отложим координату x по оси абсцисс и импульс p_x по оси ординат. Механическое состояние системы в каждый момент времени будет изображаться точкой на этой плоскости, соответствующей значениям x и p_x в этот момент времени. При изменении механического состояния изображающая его точка будет двигаться в этой плоскости по некоторой линии. Если рассматриваемая система возвращается в исходное состояние, то соответствующая такому движению линия замыкается. Плоскость $(x,\ p_x)$ или $(x,\ v_x)$ называется *фазовой плоскостью*, а кривая, по которой движется изображающая точка при изменении механического состояния системы, — *фазовой траекторией*.

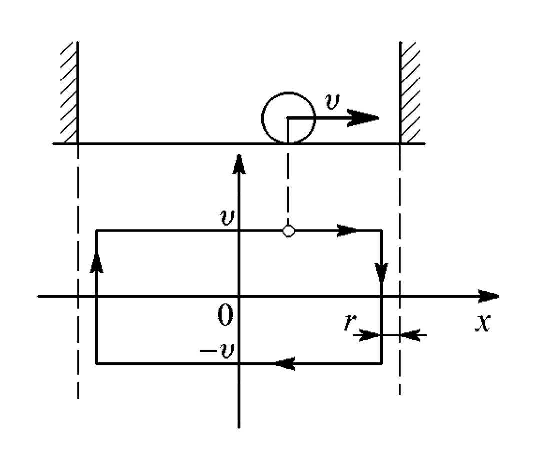


Рис. 134. Шарик, упруго отражающийся от стенок, и его фазовая траектория

Построим фазовые траектории для некоторых простых систем.

Простейший пример — это движущийся без трения по горизонтали упругий шарик, поочередно отражающийся от двух параллельных вертикальных стенок (рис. 134). Если удар о стенку считать абсолютно упругим, то неизменная по модулю скорость шарика практически скачком меняет

направление у стенки. Фазовая траектория движения шарика радиуса r показана на нижней части рис. 134. Она представляет собой прямоугольник, верхняя горизонтальная сторона которого соответствует движению шарика с постоянной скоростью v на всем интервале от левой стенки до правой, а нижняя — обратному движению от правой стенки до левой, когда проекция скорости равна $-v$. Вертикальные стороны фазовой траектории соответствуют изменению скорости при неизменном значении координаты от v до $-v$ у правой стенки и от $-v$ до v у левой. Изображающая механическое состояние шарика точка обходит фазовую траекторию в направлении по часовой стрелке. По горизонтальным участкам фазовой траектории эта точка движется равномерно, а вертикальные проскакивает мгновенно в соответствии с выбранной моделью упругого удара о стенки.

Другой пример — шарик, свободно падающий в поле тяжести и упруго отражающийся от горизонтальной плиты. При пренебрежении потерями механической энергии шарик будет совершать периодическое движение, поднимаясь до некоторой высоты и свободно падая обратно. Период движения шарика зависит от максимальной высоты подъема h, которая определяется начальными условиями, и равен, очевидно, суммарному времени падения и подъема, т. е. $2\sqrt{2h/g}$. Зависимость скорости шарика от его высоты z проще всего найти с помощью закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = mgh, \qquad (1)$$

откуда для $v(z)$ получаем

$$v(z) = \pm\sqrt{2g(h-z)}. \qquad (2)$$

Два знака перед квадратным корнем соответствуют движению шарика вверх и вниз.

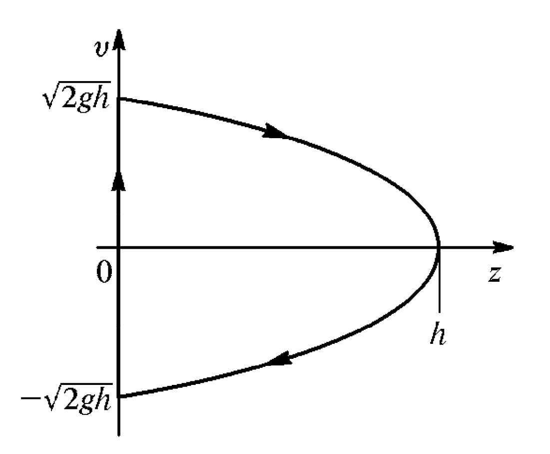


Рис. 135. Фаовая траектория шарика, отскакивающего от горизонтальной упругой плиты в поле тяжести

Фазовая траектория этого движения, изображенная на рис. 135, состоит из вертикального участка, соответствующего мгновенному изменению направления скорости шарика при ударе о плиту, и части параболы с горизонтальной осью симметрии, определяемой уравнением (2). Для удобства начало отсчета высоты z шарика выбрано на уровне r над плитой, где r — радиус шарика. Точка, изображающая механическое состояние шарика, движется по фазовой траектории по часовой стрелке. На верхней ветви параболического участка изображающая точка замедляется, что соответствует уменьшению скорости шарика по мере его подъема, а на нижнем — разгоняется. Вертикальный участок фазовой траектории изображающая точка проскакивает мгновенно.

Фазовая траектория и потенциальная энергия. Уравнение фазовой траектории консервативной системы фактически представляет собой уравнение закона сохранения энергии. В данном случае, например, зависимость $v(z)$, выражаемая соотношением (2), была получена из (1). Так как в выражение для механической энергии системы входит слагаемым ее потенциальная энергия $E_п(z)$, то интересно сопоставить фазовую траекторию с графиком потенциальной энергии (рис. 136).

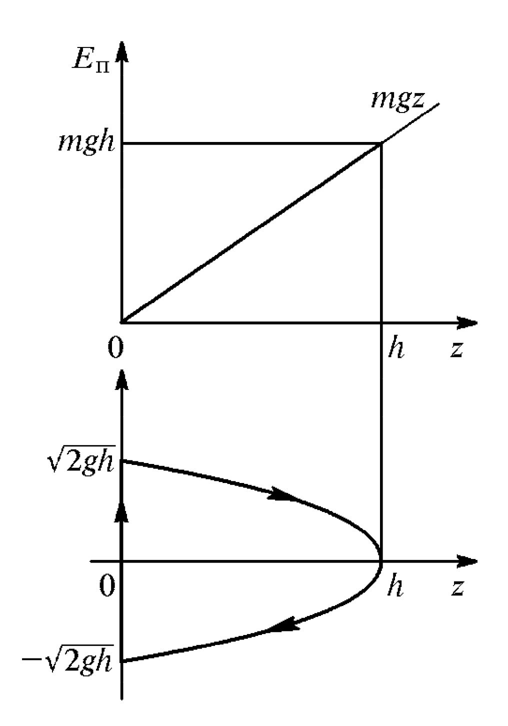


Рис. 136. График потенциальной энергии и фазовая траектория для шарика в поле тяжести, отскакивающего от горизонтальной упругой плиты

В верхней части рисунка приведен график потенциальной энергии шарика. Этот график представляет собой «потенциальную яму», состоящую из наклонной правой стенки, соответствующей линейному увеличению потенциальной энергии в однородном поле тяжести с высотой, и вертикальной левой стенки, соответствующей выбранной модели упругого отражения шарика от горизонтальной плиты. Эта ветвь графика $E_п$ соответствует потенциальной энергии упругой деформации. Она получается вертикальной при бесконечно большой жесткости (модуле Юнга) деформируемого материала. На графике потенциальной энергии отложено также значение полной механической энергии $E = mgh$.

На нижней части рисунка показана фазовая траектория движения шарика с таким значением полной энергии. Скорость обращается в нуль в тех точках оси z, где потенциальная энергия становится равной полной энергии. Это границы движения с такой энергией, или *точки поворота*. В данном случае это точка $z = h$, соответствующая максимальной высоте подъема, и точка $z = 0$. За пределами этих точек движение при данной полной энергии $E = mgh$ невозможно.

Фазовая траектория дает наглядное представление о движении в целом, позволяя восстановить его полную картину. Фазовую траекторию, разумеется, можно построить, решив уравнения динамики и найдя функции $x(t)$ и $v(t)$. Но, как мы видели, ее можно построить, имея только выражение для механической энергии системы. Метод фазовых траекторий оказывается очень эффективным при изучении сложных движений, когда не удается получить аналитическое решение уравнений динамики.

Математический маятник. В качестве примера рассмотрим *математический маятник* — точку массы m, прикрепленную к концу легкого жесткого стержня длины l, который может поворачиваться вокруг горизонтальной оси, проходящей через другой ее конец (рис. 137). Потенциальная энергия такой системы в поле тяжести зависит от угла φ отклонения стержня от вертикального равновесного положения. Ее можно записать в виде

$$E_{\text{п}}(\varphi) = mgl(1 - \cos\varphi). \qquad (3)$$

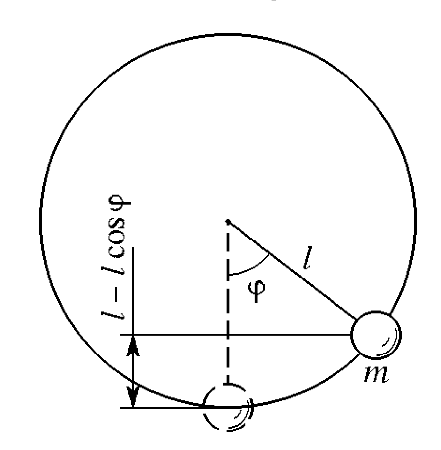


Рис. 137. Маятник в поле тяжести: $E_{\text{п}} = mgl(1 - \cos\varphi)$

График $E_{\text{п}}(\varphi)$ приведен в верхней части рис. 138. Минимум потенциальной энергии соответствует устойчивому положению равновесия при $\varphi = 0$. Максимумы в точках $\varphi = \pi$ и $\varphi = -\pi$ соответствуют одному и тому же вертикальному перевернутому неустойчивому положению равновесия

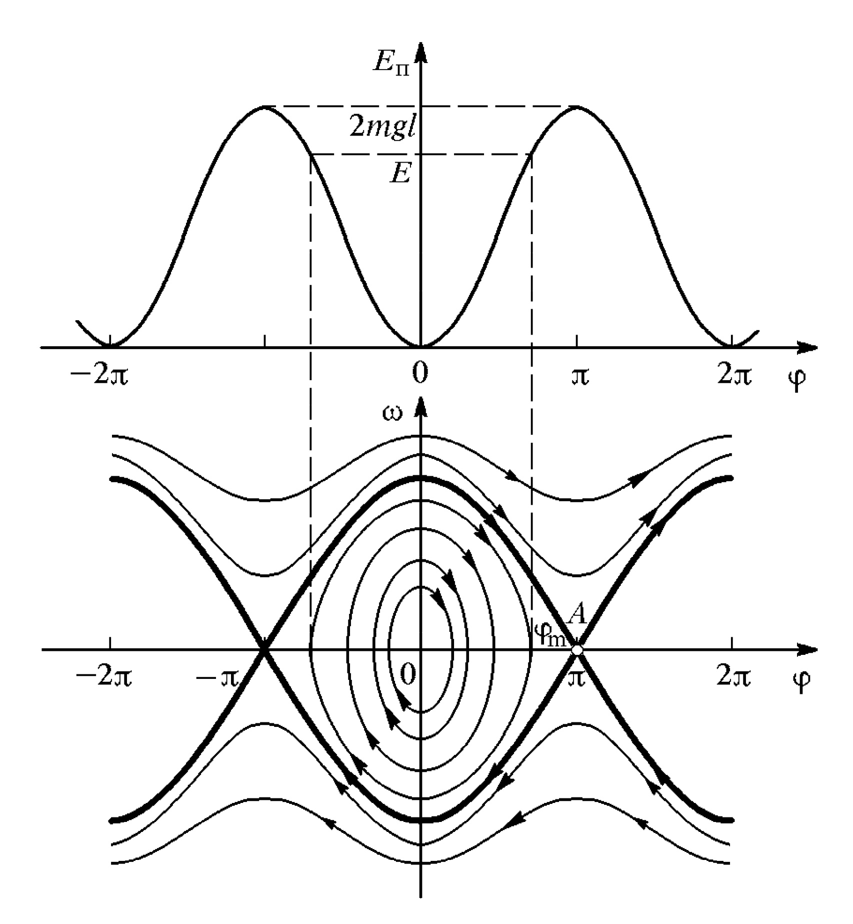


Рис. 138. Потенциальная энергия и фазовая плоскость тяжелого маятника в поле тяжести

маятника. Точка массы m может двигаться только по дуге окружности радиуса l. Поэтому ее скорость v можно записать как

$v = l\omega$, где $\omega = d\varphi/dt$ — угловая скорость, а кинетическую энергию — как $ml^2\omega^2/2$. В отсутствие трения механическая энергия маятника E сохраняется. Уравнение закона сохранения энергии имеет вид

$$\frac{ml^2\omega^2}{2} + mgl(1 - \cos\varphi) = E. \qquad (4)$$

Значение полной энергии E определяется начальными условиями. Можно, например, возбуждать маятник, находящийся в нижнем положении, сообщая ему толчком некоторую начальную скорость v_0. В этом случае $E = mv_0^2/2$. Характер движения маятника зависит от значения этой полной энергии E. Если E превышает максимальное возможное значение потенциальной энергии $E_{\text{п max}} = 2mgl$, маятник совершает непрерывное неравномерное вращение в одну сторону с периодически изменяющейся угловой скоростью. Если же $E < 2mgl$, маятник совершает колебания около положения устойчивого равновесия, отклоняясь от него вправо и влево на одинаковые углы.

Фазовый портрет маятника. Наглядную картину возможных движений маятника дает фазовая плоскость, показанная в нижней части рис. 138, где по оси абсцисс отложен угол φ отклонения из равновесия, а по оси ординат — угловая скорость ω. Непрерывному вращению маятника соответствуют незамкнутые фазовые траектории: верхняя траектория относится к вращению против часовой стрелки (в положительном направлении отсчета угла φ), а нижняя — к вращению по часовой стрелке. Видно, что при прохождении нижней точки $\varphi = 0$ маятник движется быстро, а в верхней точке — замедляется.

Замкнутые фазовые траектории соответствуют периодическим колебаниям около устойчивого положения равновесия. Изображающая механическое состояние точка обходит эти траектории по часовой стрелке вокруг точки O на фазовой плоскости, соответствующей состоянию покоя в положении устойчивого равновесия. В положении равновесия скорость максимальна. Она убывает по модулю по мере приближения к точкам поворота $\pm\varphi_m$, в которых потенциальная энергия сравнивается с полной. В этих точках скорость обращается в нуль, а направление движения маятника изменяется на противоположное.

Фазовые траектории, показанные на диаграмме жирными линиями, — это так называемые *сепаратрисы*, которые отделяют замкнутые фазовые траектории от разомкнутых. Уравнения сепаратрис получаются из (4), если положить там $E = 2mgl$:

$$\omega(\varphi) = \pm\sqrt{2\,\frac{g}{l}\,(1 + \cos\varphi)} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (5)$$

Точка, изображающая механическое состояние системы с полной энергией $E = 2mgl$, движется на фазовой плоскости по сепаратрисе. Подходя, например, к точке A, соответствующей перевернутому положению маятника, она постепенно замедляется и в точке A «застревает» — останавливается в положении неустойчивого равновесия. Формально приближение к этому состоянию в отсутствие трения продолжается бесконечно долго. Из точки A выходят две фазовые траектории в соответствии с тем, что застывший в неустойчивом положении равновесия маятник может «свалиться» в любую сторону.

- Нарисуйте схематически график потенциальной энергии вместе с фазовой диаграммой для шарика, поочередно отражающегося от параллельных вертикальных стенок. Какой смысл имеет то обстоятельство, что соответствующая потенциальная яма имеет бесконечно высокие стенки?
- Каким положениям маятника соответствуют значения $\varphi = \pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, ... и $\varphi = \pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... фазовой диаграммы на рис. 138?
- Покажите, что по замкнутым фазовым траекториям на рис. 138 изображающая точка движется по часовой стрелке.
- Объясните, почему уравнения сепаратрис (5) получаются из закона сохранения энергии (4), если положить в нем $E = 2mgl$.
- Через каждую точку фазовой плоскости проходит, как правило, только одна фазовая траектория, что соответствует механическому детерминизму: задание состояния в какой-либо момент времени однозначно определяет дальнейшее движение системы. Какой смысл имеют точки фазовой плоскости (например, точка A на рис. 138), которые не удовлетворяют этому условию?
- Проходят ли фазовые траектории через точку O на рис. 138?

△ **Адиабатические инварианты.** Изменение параметров физической системы всегда сопровождается изменением некоторых характеристик ее движения. Например, изменение длины маятника настенных часов приводит к изменению периода его колебаний, что используется для регулировки точности хода часов. Особый интерес представляет случай, когда изменение параметров системы происходит непосредственно во время ее движения.

Оказывается, что в физической системе существуют характеристики, которые остаются почти постоянными при медленном, как говорят, адиабатическом изменении ее параметров. Такие величины, сохраняющиеся с большой точностью при медленном изменении параметров системы, называются *адиабатическими инвариантами*. Условие адиабатичности изменения параметров можно записать в виде $T_1/T_2 \ll 1$, где T_1 — характерный для системы период, а T_2 — характерное время изменения ее параметров.

Как находить адиабатические инварианты и как определять точность, с которой они сохраняются? Решение этих вопросов представляет собой одну из красивейших и еще незавершенных областей физики. С адиабатическими инвариантами связано так много важных результатов в классической и квантовой физике, что сейчас уже невозможно представить себе какую-либо область физики без этого понятия.

Пример инварианта. В существовании адиабатических инвариантов легко убедиться, обратившись к рассмотренному выше примеру упругого шарика, поочередно отражающегося от двух параллельных вертикальных стенок. Предположим, что одна из стенок, например правая, медленно движется вправо или влево с некоторой заданной скоростью u, малой по сравнению со скоростью шарика v: $u/v \ll 1$. При каждом отражении шарика от этой стенки будет изменяться не только направление его скорости на противоположное, но и ее модуль. Изменение скорости шарика при отражении от движущейся стенки проще всего найти следующим образом. Перейдем в систему отсчета, связанную с движущейся стенкой. В этой системе проекция скорости шарика при упругом ударе изменяет знак на противоположный. Поэтому, если до удара проекция скорости шарика в лабораторной системе была v_x, в системе, связанной со стенкой, она была $v_x - u_x$, то после удара в этой системе она равна $-(v_x - u_x) = u_x - v_x$, и соответственно в лабораторной системе после удара

$$v'_x = 2u_x - v_x. \qquad (6)$$

Так будет повторяться при каждом соударении шарика со стенкой, поэтому шарик будет постепенно разгоняться, если стенки сближаются ($u_x < 0$), и замедляться, если стенки раздвигаются ($u_x > 0$). Пусть для определенности расстояние между стенками уменьшается. Тогда при каждом отражении от движущейся навстречу ему стенки шарик, в соответствии с (6), увеличивает свою скорость на $2u$. После N таких столкновений его скорость станет равной

$$v' = v + 2uN. \qquad (7)$$

Считая, что эти N соударений произошли за время Δt, для нового расстояния l' между стенками можно написать

$$l' = l - u\,\Delta t. \qquad (8)$$

Если за время Δt первоначальное расстояние между стенками изменилось незначительно, то соотношение между N и Δt можно приближенно записать в виде

$$\Delta t = \frac{2l}{v} N, \qquad (9)$$

так как $2l/v$ соответствует промежутку времени между двумя последовательными соударениями с движущейся стенкой. Подставляя Δt из (9) в (8), перепишем соотношения (7) и (8) следующим образом:

$$v' = v\left(1 + 2\,\frac{u}{v}\,N\right), \quad l' = l\left(1 - 2\,\frac{u}{v}\,N\right). \tag{10}$$

Из формул (10) видно, что относительное уменьшение расстояния между стенками сопровождается таким же относительным увеличением скорости шарика. Если вторые слагаемые в скобках малы по сравнению с единицей, произведение lv остается почти постоянным:

$$l'v' = lv\left[1 - \left(2\,\frac{u}{v}\,N\right)^2\right] \approx lv = \mathrm{const}. \tag{11}$$

Это и есть адиабатический инвариант рассматриваемой системы.

Геометрический смысл инварианта. Адиабатическому инварианту можно придать наглядный геометрический смысл на фазовой плоскости (см. рис. 134). Легко видеть, что произведение $2lv$ представляет собой площадь части фазовой плоскости, охватываемой замкнутой фазовой траекторией рассматриваемого периодического движения. При сближении стенок этот прямоугольник меняет свои пропорции (рис. 139), но так, что его площадь остается неизменной.

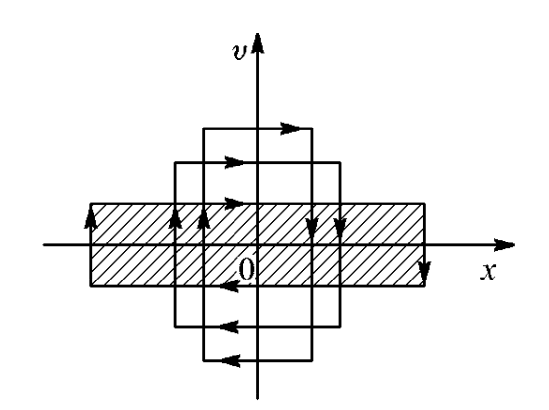


Рис. 139. При медленном изменении расстояния между стенками охватываемая фазовой траекторией площадь остается неизменной

Другим механическим системам соответствуют, разумеется, иные фазовые траектории, например эллипсы на рис. 138, описывающие колебания маятника около устойчивого положения равновесия. Но охватываемая фазовой траекторией площадь будет представлять собой адиабатический инвариант лишь при условии, когда эта площадь соответствует физическому смыслу инварианта, т. е. имеет размерность энергии, умноженной на время: ML^2T^{-1} (или L^2T^{-1}). Это значит, что для маятника по осям на фазовой плоскости следует откладывать φ и $l^2\dot{\varphi}$. При медленном изменении какого-либо параметра, в частности длины колеблющегося маятника, площадь, охватываемая эллипсом, будет оставаться неизменной, хотя его полуоси изменяются.

Физический смысл инварианта. Физический смысл адиабатического инварианта проясняется, если в рассмотренном примере шарика между стенками перейти от скорости v к импульсу ша-

рика $p = mv$ и подставить в инвариантное произведение $lp = lmv$ расстояние l, выразив его через скорость v и период T движения шарика: $l = vT/2$. В результате получим

$$lmv = mv\frac{vT}{2} = \frac{mv^2}{2}T = ET,$$

где $E = mv^2/2$ — кинетическая энергия шарика. Если система обладает не только кинетической, но и потенциальной энергией, как в случае качающегося около положения равновесия маятника, то адиабатический инвариант представляет собой произведение полной механической энергии E системы на период T. При медленном изменении параметров системы ее энергия и период изменяются так, что их произведение остается неизменным: $ET = \text{const}$.

Условия существования инварианта. При поиске адиабатических инвариантов в изучаемой системе следует быть очень осмотрительным. Напомним, что условие адиабатичности изменения параметра заключается в выполнении неравенства $T_1 \ll T_2$: параметр должен изменяться медленно в масштабе характерного для системы времени T_1 (периода движения). Например, если медленно движущуюся стенку в рассмотренной выше системе перед каждым столкновением с шариком останавливать на короткое время, то никакого адиабатического инварианта уже не будет: модуль скорости шарика не меняется при таком медленном монотонном уменьшении расстояния между стенками. Здесь характерное время изменения внешнего параметра оказывается таким же, как и период движения шарика.

Еще более поучительным может оказаться следующий пример. Как уже отмечалось, при медленном изменении длины маятника, например при втягивании в отверстие нити, на которой качается грузик, инвариант существует: произведение энергии колебаний на период остается неизменным, хотя каждый из сомножителей изменяется. Однако при медленном изменении массы грузика, например за счет его испарения, адиабатического инварианта не существует, так как период его колебаний остается неизменным. В данном случае условия уменьшения массы (скорость отделяющихся молекул пара) изменяются в такт с колебаниями маятника, т. е. параметр изменяется в том же временно́м масштабе, что и колебания маятника. В противоположность этому при втягивании нити колебания маятника никак не влияют на скорость изменения длины нити, определяемую только внешними условиями.

Вопрос оценки точности, с которой сохраняется адиабатический инвариант, например (11), не так прост, как может показаться на первый взгляд. Пока второе слагаемое в скобках много

меньше единицы, точность инварианта определяется отбрасываемыми квадратичными членами (которые не учитывались уже в (9)). Но даже в тех случаях, когда члены $(2(u/v)N)^2$ уже нельзя считать малыми, адиабатический инвариант lv сохраняется с точностью, существенно превышающей ту, которую можно ожидать на основании формулы (11).

- Что такое адиабатический инвариант? Каков его геометрический смысл на фазовой диаграмме?
- Пусть расстояние между сближающимися стенками уменьшилось в два раза. Во сколько раз при этом изменится энергия мечущегося между ними шарика? За счет чего происходит увеличение энергии шарика? Как изменится период? ▲

§ 39. Механическое равновесие

Раздел механики, в котором изучаются условия равновесия тел, называется *статикой*. Проще всего рассмотреть условия равновесия *абсолютно твердого тела*, т. е. такого тела, размеры и форму которого можно считать неизменными. Понятие абсолютно твердого тела является абстракцией, поскольку все реальные тела под влиянием приложенных к ним сил в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и размеры. Величина деформаций зависит как от приложенных к телу сил, так и от свойств самого тела — его формы и свойств материала, из которого оно изготовлено. Во многих практически важных случаях деформации бывают малыми и использование представлений об абсолютно твердом теле является оправданным.

Модель абсолютно твердого тела. Однако не всегда малость деформаций является достаточным условием для того, чтобы тело можно было считать абсолютно твердым. Чтобы пояснить это, рассмотрим следующий пример. Доска, лежащая на двух опорах (рис. 140*а*), может рассматриваться как абсолютно твердое тело, несмотря на то, что она слегка прогибается под действием сил тяжести. Действительно, в этом случае условия механического равновесия позволяют определить силы реакции опор $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$, не учитывая деформации доски.

Но если та же доска лежит на тех же опорах (рис. 140*б*), то представление об абсолютно твердом теле является неприменимым. В самом деле, пусть крайние опоры находятся на одной горизонтали, а средняя — чуть ниже. Если доска абсолютно твердая, т. е. вообще не прогибается, то она совсем не давит на среднюю опору ($\mathbf{N}_3 = 0$). Если же доска прогибается, то она давит на среднюю опору, причем тем сильнее, чем больше деформация. Условия рав-

новесия абсолютно твердого тела в этом случае не позволяют определить силы реакции опор $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ и $\mathbf{N}_3$, так как приводят к

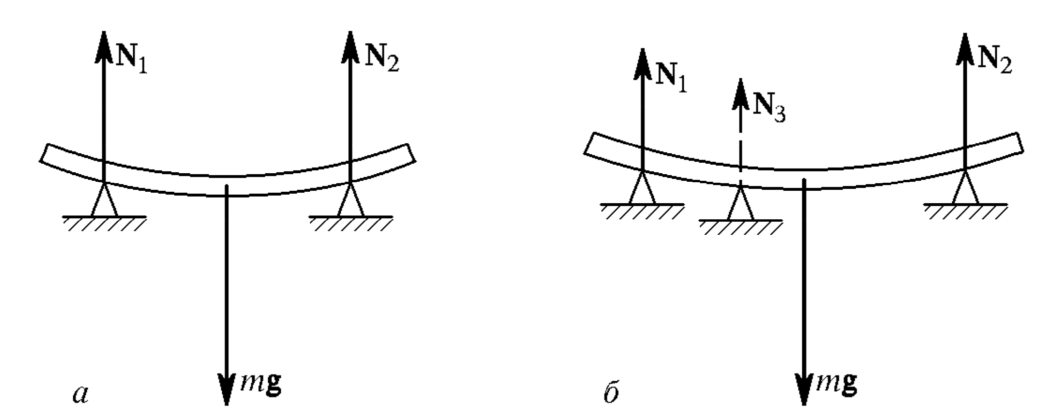


Рис. 140. Силы реакции, действующие на доску, лежащую на двух (*а*) и на трех (*б*) опорах

двум уравнениям для трех неизвестных величин. Такие системы носят название статически неопределимых. Для их расчета необходимо учитывать упругие свойства тел.

Приведенный пример показывает, что применимость модели абсолютно твердого тела в статике определяется не столько свойствами самого тела, сколько условиями, в которых оно находится. Так, в рассмотренном примере даже тонкую соломинку можно считать абсолютно твердым телом, если она лежит на двух опорах. Но даже очень жесткую балку нельзя считать абсолютно твердым телом, если она лежит на трех опорах.

Условия равновесия. Условия равновесия абсолютно твердого тела представляют собой частный случай динамических уравнений, когда ускорение отсутствует, хотя исторически статика возникла из потребностей строительной техники почти на два тысячелетия раньше динамики. В инерциальной системе отсчета твердое тело находится в равновесии, если векторная сумма всех действующих на тело внешних сил и векторная сумма моментов этих сил равны нулю. При выполнении первого условия равно нулю ускорение центра масс тела. При выполнении второго условия отсутствует угловое ускорение вращения. Поэтому если в начальный момент тело покоилось, то оно будет оставаться в покое и дальше.

В дальнейшем мы ограничимся изучением сравнительно простых систем, в которых все действующие силы лежат в одной плоскости. В этом случае векторное условие

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \qquad (1)$$

сводится к двум скалярным:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \qquad (2)$$

если расположить оси x и y в плоскости действия сил. Некоторые из входящих в условия равновесия (1) действующих на тело внешних сил могут быть заданы, т. е. их модули и направления известны. Что же касается сил реакции связей или опор, ограничивающих возможное перемещение тела, то они, как правило, заранее не заданы и сами подлежат определению. В отсутствие трения силы реакции перпендикулярны поверхности соприкосновения тел.

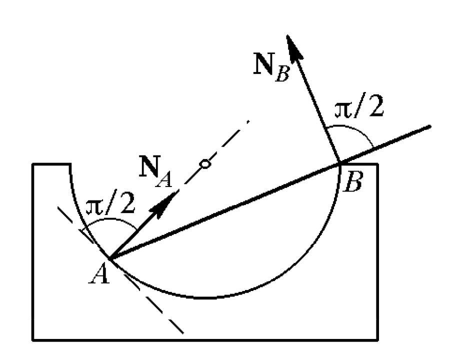


Рис. 141. К определению направления сил реакции

Силы реакции. Иногда возникают сомнения в определении направления силы реакции связи, как, например, на рис. 141, где изображен стержень, опирающийся в точке A о гладкую вогнутую поверхность чашки и в точке B на острый край чашки. Для определения направления сил реакции в этом случае можно мысленно немного подвинуть стержень, не нарушая его контакта с чашкой. Сила реакции будет направлена перпендикулярно поверхности, по которой скользит точка контакта. Так, в точке A действующая на стержень сила реакции перпендикулярна поверхности чашки, а в точке B — перпендикулярна стержню.

Момент силы. Моментом $\mathbf{M}$ силы $\mathbf{F}$ относительно некоторой точки O называется векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из O в точку приложения силы, на вектор силы $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{3}$$

Вектор $\mathbf{M}$ момента силы перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$.

Уравнение моментов. Если на тело действует несколько сил, то второе, связанное с моментами сил условие равновесия записывается в виде

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \tag{4}$$

При этом точка O, из которой проводятся радиусы-векторы $\mathbf{r}_i$, должна выбираться общей для всех действующих сил.

Для плоской системы сил векторы моментов всех сил направлены перпендикулярно плоскости, в которой лежат силы, если моменты рассматриваются относительно точки, лежащей в этой же плоскости. Поэтому векторное условие (4) для моментов сводится к одному скалярному: в положении равновесия алгебраическая сумма моментов всех внешних действующих сил равна нулю. Модуль момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки O равен произведению модуля си-

лы F на расстояние от точки O до линии, вдоль которой действует сила $\mathbf{F}$. При этом моменты, стремящиеся повернуть тело по часовой стрелке, берутся с одним знаком, против часовой стрелки — с противоположным. Выбор точки, относительно которой рассматриваются моменты сил, производится исключительно из соображений удобства: уравнение моментов будет тем проще, чем больше сил будут иметь равные нулю моменты.

Пример равновесия. Для иллюстрации применения условий равновесия абсолютно твердого тела рассмотрим следующий пример. Легкая лестница-стремянка состоит из двух одинаковых частей, шарнирно соединенных вверху и связанных веревкой у основания (рис. 142). Определим, какова сила натяжения веревки, с какими силами взаимодействуют половинки лестницы в шарнире и с какими силами они давят на пол, если на середине одной из них стоит человек весом P.

Рассматриваемая система состоит из двух твердых тел — половинок лестницы, и условия равновесия можно применять как для системы в целом, так и для ее частей. Применяя условия равновесия ко всей системе в целом, можно найти силы реакции пола $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ (рис. 142). При отсутствии трения эти силы направлены вертикально вверх и условие равенства нулю векторной суммы внешних сил (1) принимает вид

$$N_1 + N_2 = P. \qquad (5)$$

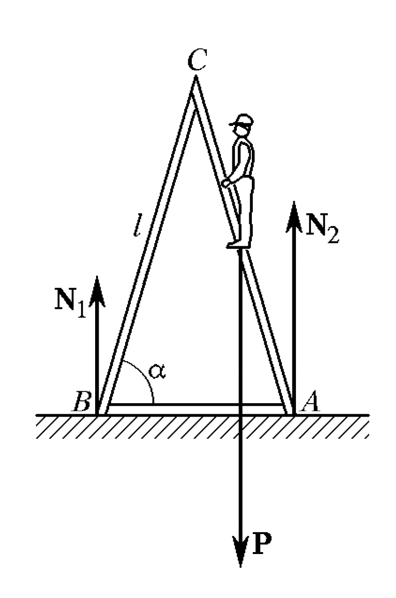


Рис. 142. Векторная сумма внешних сил и сумма моментов внешних сил в равновесии равна нулю

Условие равновесия моментов внешних сил относительно точки A записывается следующим образом:

$$N_1 \cdot 2l \cos\alpha = P\,\frac{l}{2}\cos\alpha, \qquad (6)$$

где l — длина лестницы, а α — угол, образованный лестницей с полом. Решая систему уравнений (5) и (6), находим $N_1 = P/4$, $N_2 = 3P/4$.

Разумеется, вместо уравнения моментов (6) относительно точки A можно было бы написать уравнение моментов относительно точки B (или любой другой точки). При этом получилась бы система уравнений, эквивалентная использованной системе (5) и (6).

Сила натяжения веревки и силы взаимодействия в шарнире для рассматриваемой физической системы являются внутренними и поэтому не могут быть определены из условий равновесия всей системы как целого. Для определения этих сил необходимо рассматривать условия равновесия отдельных частей системы. При этом

удачным выбором точки, относительно которой составляется уравнение моментов сил, можно добиться упрощения алгебраической системы уравнений. Так, например, в данной системе можно рассмотреть условие равновесия моментов сил, действующих на левую половинку лестницы, относительно точки C, в которой находится шарнир.

При таком выборе точки C силы, действующие в шарнире, не войдут в это условие, и мы сразу находим силу натяжения веревки T:

$$N_1 l \cos \alpha = T l \sin \alpha,$$

откуда, учитывая, что $N_1 = P/4$, получаем

$$T = \frac{P}{4} \operatorname{ctg} \alpha. \qquad (7)$$

Условие (7) означает, что равнодействующая сил $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}_1$ проходит через точку C, т. е. направлена вдоль лестницы. Поэтому равновесие этой половинки лестницы возможно, только если сила $\mathbf{Q}_1$, действующая на нее в шарнире, также направлена вдоль лестницы (рис. 143), а ее модуль равен модулю равнодействующей сил $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}_1$:

$$Q_1 = \frac{P}{4 \sin \alpha}$$

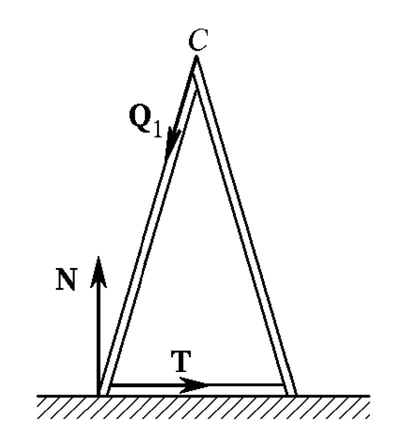


Рис. 143. Линии действия всех трех сил, действующих на левую половину лестницы, проходят через одну точку

Абсолютное значение силы $\mathbf{Q}_2$, действующей в шарнире на другую половинку лестницы, на основании третьего закона Ньютона равно $|\mathbf{Q}_1|$, а ее направление противоположно направлению вектора $\mathbf{Q}_1$. Направление силы $\mathbf{Q}_1$ можно было бы определить непосредственно из рис. 143, учитывая, что при равновесии тела под действием трех сил линии, по которым действуют эти силы, пересекаются в одной точке. Действительно, рассмотрим точку пересечения линий действия двух из этих трех сил и составим уравнение моментов относительно этой точки. Моменты первых двух сил относительно этой точки равны нулю; значит, должен равняться нулю и момент третьей силы, что в соответствии с (3) возможно, только если линия ее действия также проходит через эту точку.

Золотое правило механики. Иногда задачу статики можно решить, вообще не рассматривая условий равновесия, а используя закон сохранения энергии применительно к механизмам без трения: ни один механизм не дает выигрыша в работе. Этот закон

называют *золотым правилом механики.* Для иллюстрации такого подхода рассмотрим следующий пример: тяжелый груз весом P подвешен на невесомом шарнире с тремя звеньями (рис. 144). Какую силу натяжения должна выдержать нить, соединяющая точки A и B?

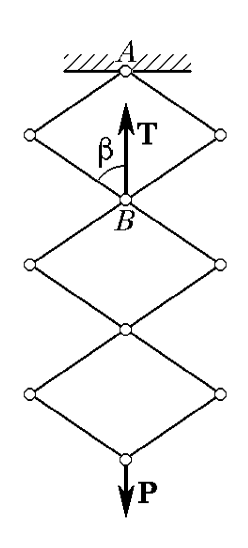


Рис. 144. К определению силы натяжения нити в трехзвенном шарнире, поддерживающем груз весом P

Попробуем с помощью этого механизма поднимать груз P. Отвязав нить в точке A, потянем ее вверх так, чтобы точка B медленно поднялась на расстояние Δh. Это расстояние ограничено тем, что сила натяжения нити T должна оставаться неизменной в процессе перемещения. В данном случае, как будет видно из ответа, сила T вообще не зависит от того, насколько сжат или растянут шарнир. Совершенная при этом работа $\Delta A = T\Delta h$. В результате груз P поднимается на высоту Δh_1, которая, как ясно из геометрических соображений, равна $3\Delta h$. Так как при отсутствии трения никаких потерь энергии не происходит, можно утверждать, что изменение потенциальной энергии груза, равное $P\,\Delta h_1$, определяется совершенной при подъеме работой. Поэтому

$$T = 3P.$$

Очевидно, что для шарнира, содержащего произвольное число n одинаковых звеньев,

$$T = nP.$$

Нетрудно найти силу натяжения нити и в том случае, когда требуется учитывать вес самого шарнира $P_{\text{ш}}$: совершаемую при подъеме работу следует приравнять сумме изменений потенциальных энергий груза и шарнира. Для шарнира из одинаковых звеньев центр масс его поднимается на $n\Delta h/2$. Поэтому

$$T = n\left(P + \frac{P_{\text{ш}}}{2}\right).$$

Сформулированный принцип («золотое правило механики») применим и тогда, когда в процессе перемещений не происходит изменения потенциальной энергии, а механизм используется для преобразования силы. Редукторы, трансмиссии, вороты, системы рычагов и блоков — во всех таких системах преобразованную силу можно определить, приравнивая работы преобразованной и приложенной сил. Другими словами, при отсутствии трения отношение этих сил определяется только геометрией устройства.

Рассмотрим с этой точки зрения разобранный выше пример со стремянкой. Конечно, использовать стремянку в качестве подъемного механизма, т. е. поднимать человека, сближая половинки стремянки, вряд ли целесообразно. Однако это не может помешать нам применить описанный метод для нахождения силы натяжения веревки. Приравнивая работу, совершаемую при сближении частей стремянки, изменению потенциальной энергии человека на стремянке и связывая из геометрических соображений перемещение Δx нижнего конца лестницы с изменением высоты груза Δh (рис. 145), получаем, как и следовало ожидать, приведенный ранее результат:

$$T = \frac{P}{4} \operatorname{ctg} \alpha.$$

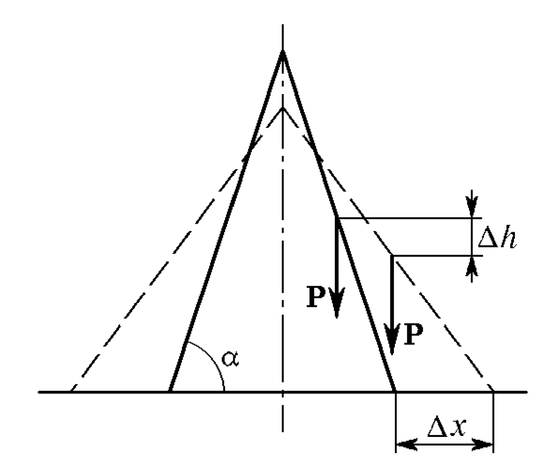


Рис. 145. Перемещения Δx нижних концов лестницы и перемещение Δh груза при сближении половинок стремянки

Как уже отмечалось, перемещение следует выбрать таким, чтобы в процессе его можно было считать действующую силу постоянной. Легко убедиться, что в примере с шарниром это условие не накладывает ограничений на перемещение, так как сила натяжения нити не зависит от угла β (рис. 144). Напротив, в задаче о стремянке перемещение следует выбирать малым, ибо сила натяжения веревки зависит от угла α.

Устойчивость равновесия. Равновесие бывает устойчивым, неустойчивым и безразличным. Равновесие *устойчиво* (рис. 146*а*), если при малых перемещениях тела из положения равновесия действующие силы стремятся вернуть его обратно, и *неустойчиво* (рис. 146*б*), если

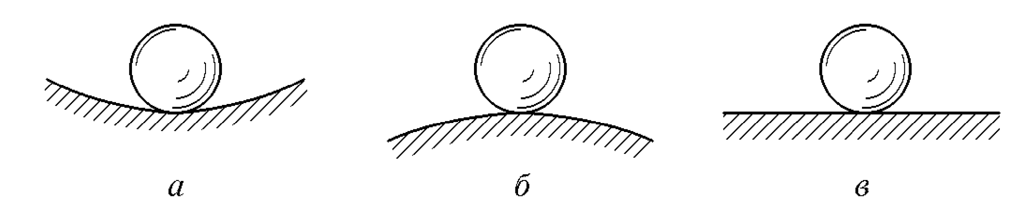


Рис. 146. Устойчивое (*а*), неустойчивое (*б*) и безразличное (*в*) равновесия

силы уводят его дальше от положения равновесия. Если же при малых смещениях действующие на тело силы и их моменты по-прежнему уравновешиваются, то равновесие *безразличное* (рис. 146*в*). При безразличном равновесии соседние положения тела также являются равновесными.

Рассмотрим примеры исследования устойчивости равновесия.

1. Устойчивому равновесию соответствует минимум потенциальной энергии тела по отношению к ее значениям в соседних положениях тела. Этим свойством часто удобно пользоваться при отыскании положения равновесия и при исследовании характера равновесия.

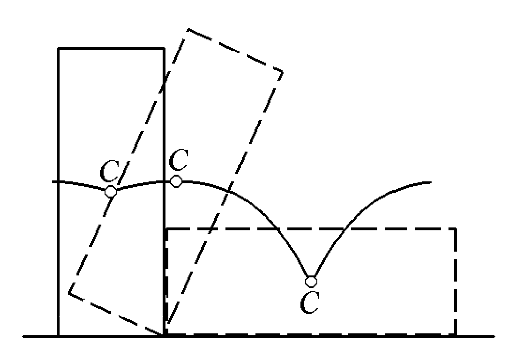


Рис. 147. Устойчивость равновесия тела и положение центра масс

Вертикальная свободно стоящая колонна находится в устойчивом равновесии, поскольку при малых наклонах ее центр масс приподнимается. Так происходит до тех пор, пока вертикальная проекция центра масс не выйдет за пределы площади опоры, т. е. угол отклонения от вертикали не превысит некоторого максимального значения. Другими словами, область устойчивости простирается от минимума потенциальной энергии (при вертикальном положении) до ближайшего к нему максимума (рис. 147). Когда центр масс расположен точно над границей площади опоры, колонна также находится в равновесии, но неустойчивом. Горизонтально лежащей колонне соответствует гораздо более широкая область устойчивости.

2. Имеются два круглых карандаша с радиусами R и r. Один из них расположен горизонтально, другой уравновешен на нем в горизонтальном положении так, что оси карандашей взаимно перпендикулярны (рис. 148*а*). При каком соотношении между радиусами равновесие устойчиво? На какой максимальный угол можно при этом отклонить от горизонтали верхний карандаш? Коэффициент трения карандашей друг о друга равен μ.

На первый взгляд может показаться, что равновесие верхнего карандаша вообще неустойчиво, так как центр масс верхнего карандаша лежит выше оси, вокруг которой он может поворачиваться. Однако здесь положение оси вращения не остается неизменным, поэтому этот случай требует специального исследования. Поскольку верхний карандаш уравновешен в горизонтальном положении, центры масс карандашей O_1 и O_2 лежат на этой вертикали (рис. 148*б*).

Отклоним верхний карандаш на некоторый угол φ от горизонтали. При отсутствии трения покоя он немедленно соскользнул бы вниз. Чтобы не думать пока о возможном соскальзывании, будем считать трение достаточно большим. При этом верхний карандаш «прокатывается» по нижнему без проскальзывания. Точка опоры из положения A перемещается в новое положение C, а та точка, которой верхний карандаш до отклонения опирался о нижний, пе-

реходит в положение B. Поскольку проскальзывание отсутствует, длина дуги AC равна длине отрезка BC: $AC = R\varphi = BC$. Центр

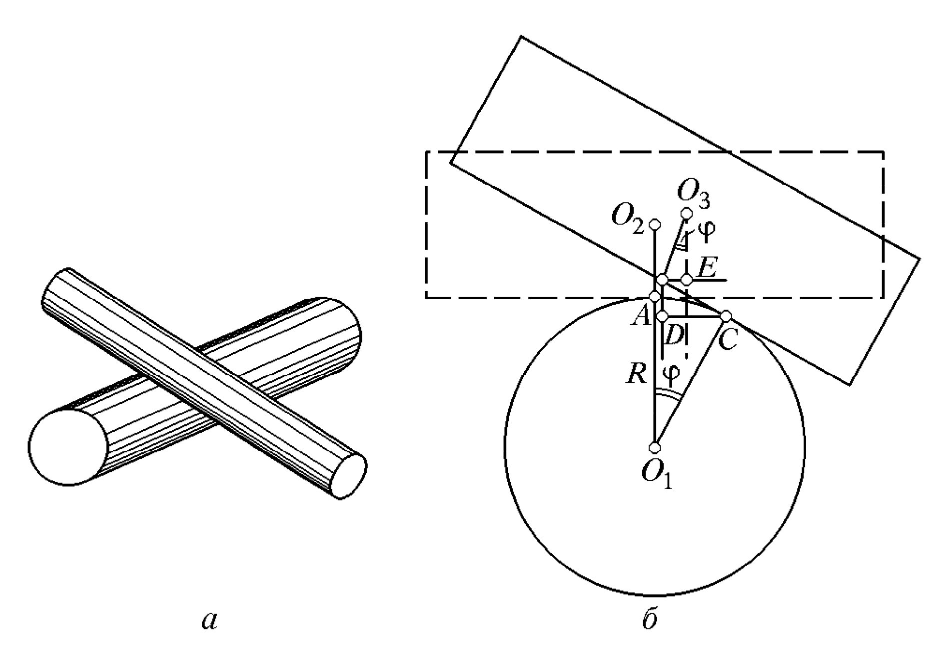


Рис. 148. Верхний карандаш уравновешен в горизонтальном положении на нижнем карандаше (*а*); к исследованию устойчивости равновесия (*б*)

масс верхнего карандаша O_2 переходит в положение O_3. Если вертикаль, проведенная через O_3, проходит левее новой точки опоры C, то сила тяжести стремится вернуть верхний карандаш в положение равновесия.

Выразим это условие математически. Проведя вертикаль через точку B, видим, что должно выполняться условие

$$BE < DC. \tag{8}$$

Так как $BE = r \sin \varphi$, а $DC = BC \cos \varphi = R\varphi \cos \varphi$, то из условия (8) получаем

$$\frac{r}{R} = \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}. \tag{9}$$

Поскольку $\operatorname{tg} \varphi > \varphi$ $(0 < \varphi < \pi/2)$, сила тяжести будет стремиться возвратить верхний карандаш в положение равновесия только при $r/R < 1$. Следовательно, устойчивое равновесие верхнего карандаша на нижнем возможно только тогда, когда его радиус меньше радиуса нижнего карандаша.

Роль трения. Для ответа на второй вопрос следует выяснить, какие причины ограничивают допустимый угол отклонения. Во-первых, при больших углах отклонения вертикаль, проведенная через центр масс верхнего карандаша, может пройти правее точки опоры C. Из условия (9) видно, что при заданном отношении радиусов карандашей $\gamma = R/r$ максимальный угол отклонения φ_1 опреде-

ляется уравнением $\operatorname{tg}\varphi_1 = \gamma\varphi_1$. Решение этого трансцендентного уравнения легко найти графически (рис. 149).

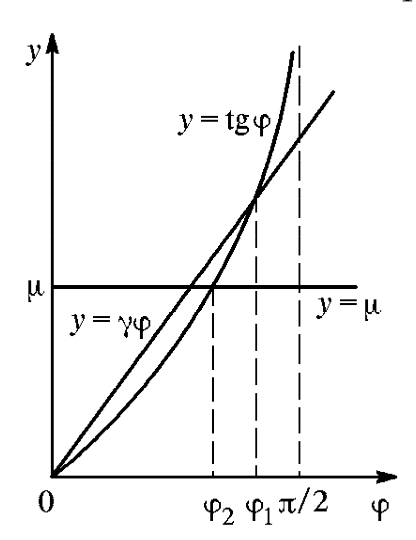


Рис. 149. Графическое решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi = \gamma\varphi$

Во-вторых, максимальное значение угла отклонения ограничивается трением: карандаш не должен соскальзывать, т. е. для предельного угла φ_2 получаем $\operatorname{tg}\varphi_2 = \mu$ (вспомните условие равновесия на наклонной плоскости). Решение этого уравнения также показано на рис. 149. Очевидно, что максимально допустимый угол отклонения равен меньшему из φ_1 и φ_2. Поскольку $\gamma > 1$, а коэффициент трения μ обычно меньше единицы, то максимально допустимый угол отклонения практически всегда определяется условием соскальзывания, т. е. углом φ_2.

- Всегда ли условий равновесия твердого тела достаточно для определения сил реакции?
- Как практически можно определить направление сил реакции при отсутствии трения?
- Как можно использовать золотое правило механики при анализе условий равновесия?
- Если в шарнире, показанном на рис. 144, нитью соединить не точки A и B, а точки A и C, то какой будет ее сила натяжения?
- Как связана устойчивость равновесия системы с ее потенциальной энергией?
- Какими условиями определяется максимальный угол отклонения тела, опирающегося на плоскость в трех точках, чтобы не была утрачена его устойчивость?

§ 40. Движение твердого тела

В твердом теле расстояния между любыми точками по определению неизменны. Твердое тело имеет шесть степеней свободы: для задания его положения нужно указать, например, три координаты какой-либо его точки и три угла, характеризующие его ориентацию в пространстве.

Поступательное движение. Движение тела, при котором его ориентация остается неизменной, называется *поступательным*. При

поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым параллельным траекториям с одинаковыми скоростями (рис. 150),

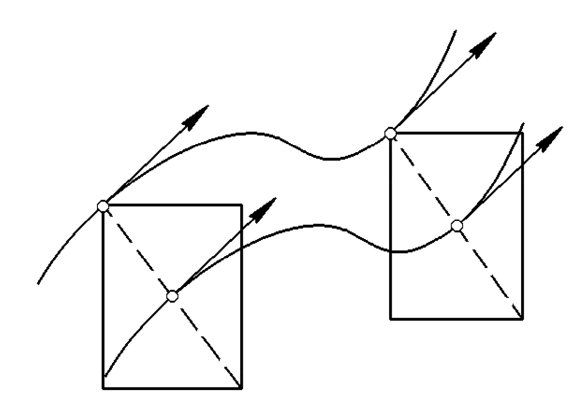


Рис. 150. При поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым параллельным траекториям с одинаковыми скоростями

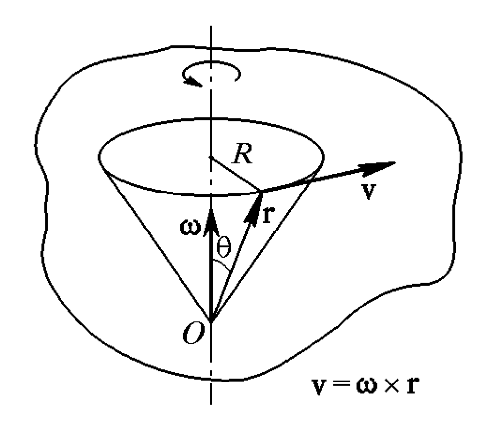


Рис. 151. Скорость точек твердого тела при вращении вокруг фиксированной оси

поэтому все тело можно рассматривать как одну материальную точку. Другие важные виды движения твердого тела — вращение вокруг фиксированной оси, плоское движение, вращение вокруг неподвижной точки.

Вращение вокруг оси. При вращении вокруг фиксированной оси (рис. 151) все точки тела движутся по окружности, причем скорость **v** любой из них равна векторному произведению одной и той же для всего тела угловой скорости **ω**, направленной вдоль оси вращения, и радиуса-вектора **r** рассматриваемой точки тела:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \qquad (1)$$

Модуль скорости $v = \omega R$, где $R = r \sin\theta$ — расстояние до оси вращения (рис. 151). Такому движению соответствует одна степень свободы.

Плоское движение. Частный случай плоского движения — качение цилиндра (рис. 152). Его можно представить как сумму вращения вокруг какой-либо оси, параллельной образующей цилиндра, и поступательного движения со скоростью, равной скорости точек цилиндра, лежащих на этой оси. При любом выборе оси угловая скорость **ω** одна и та же. В качестве оси вращения удобно выбирать либо ось O цилиндра, либо линию O' касания цилиндра с поверхностью, по которой он катится. Если качение происходит без проскальзывания, то скорости точек на линии касания O' равны нулю, а скорость любой другой точки цилиндра будет такой же, как при вращении с той же угловой скоростью вокруг неподвижной оси, проходящей через линию касания O' (*мгновенная ось вращения*).

Распределение скоростей точек, лежащих на вертикальном диаметре, показано на рис. 152*а*. Например, скорость точки A равна

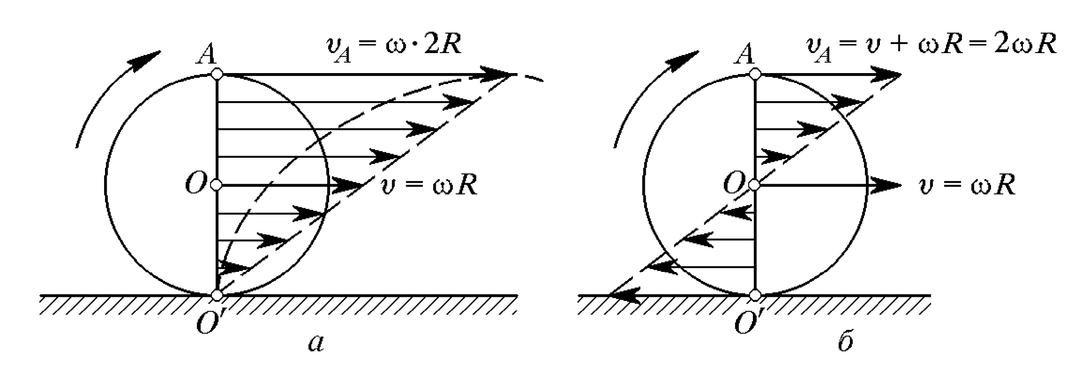


Рис. 152. Скорости точек при качении цилиндра

$v_A = \omega \cdot 2R$, так как она находится на расстоянии $2R$ от мгновенной оси O'. Ее можно представить как сумму скорости v оси O цилиндра и скорости ωR, обусловленной вращением вокруг оси цилиндра (рис. 152*б*):

$$v_A = v + \omega R = 2\omega R,$$

так как при качении без проскальзывания $v = \omega R$. Точки оси цилиндра движутся прямолинейно; точки поверхности цилиндра — по циклоидам; точки, находящиеся между осью и поверхностью, — по трохоидам.

Вращение вокруг точки. Пример вращения вокруг неподвижной точки — качение без проскальзывания конуса B по поверхности неподвижного конуса A, имеющего с ним общую вершину O (рис. 153). Такое движение можно представить либо как чистое вращение конуса B с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей по линии касания, либо как сумму двух вращений: с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ вокруг собственной оси и с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ вокруг оси неподвижного конуса A:

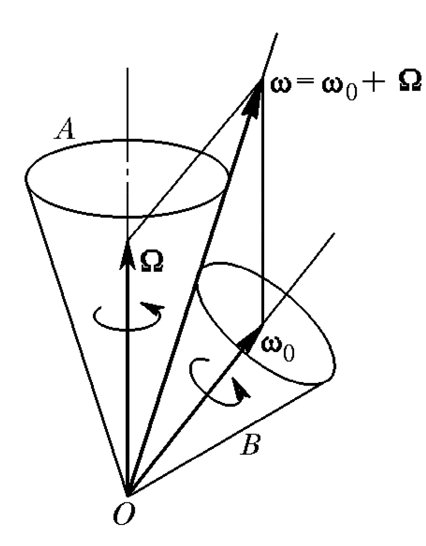


Рис. 153. Качение конуса B по поверхности конуса A

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}. \qquad (2)$$

Это значит, что скорость любой точки катящегося конуса определяется по формуле (1), в которую можно подставить $\boldsymbol{\omega}$ из (2). Точки оси подвижного конуса движутся по окружностям, а не лежащие на оси точки описывают сложные волнообразные траектории.

Момент импульса. В динамике твердого тела наряду с импульсом важную роль играет физическая величина, называемая *моментом импульса*. Для материальной точки момент импульса $\mathbf{L}$ определяется как векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ частицы на ее импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \tag{3}$$

Из этого определения и второго закона Ньютона $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ следует, что закон изменения момента импульса частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \tag{4}$$

где $\mathbf{M}$ — момент суммы всех действующих сил $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{5}$$

Динамика твердого тела. Основные положения динамики абсолютно твердого тела приводятся ниже без доказательства. Основу динамики твердого тела составляют законы изменения импульса $\mathbf{P}$ и момента импульса $\mathbf{L}$ тела, рассматриваемого как система материальных точек:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i, \tag{6}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \tag{7}$$

Импульс $\mathbf{P}$ и момент импульса $\mathbf{L}$ тела складываются из импульсов и моментов импульса отдельных материальных точек, на которые можно мысленно разбить твердое тело. Шесть независимых уравнений (6) и (7) соответствуют шести степеням свободы твердого тела.

Если все внешние силы $\mathbf{F}_i$ известны, то уравнение (6) позволяет найти закон движения центра масс тела, а (7) — закон вращения тела вокруг центра масс.

Вращение твердого тела вокруг фиксированной оси, как уже отмечалось, характеризуется одной степенью свободы. В этом случае проекция уравнения момента импульса (7) на направление оси вращения не содержит неизвестных сил реакции в подшипниках, что позволяет найти угловое ускорение тела $d\omega/dt$.

Момент инерции. Проекцию момента импульса на ось вращения, как следует из (3), можно представить в виде $I\omega$, где I — *момент инерции* тела относительно оси, складывающийся из моментов инерции отдельных его элементов, равных произведению массы элемента Δm_i на квадрат расстояния r_i до оси:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2. \tag{8}$$

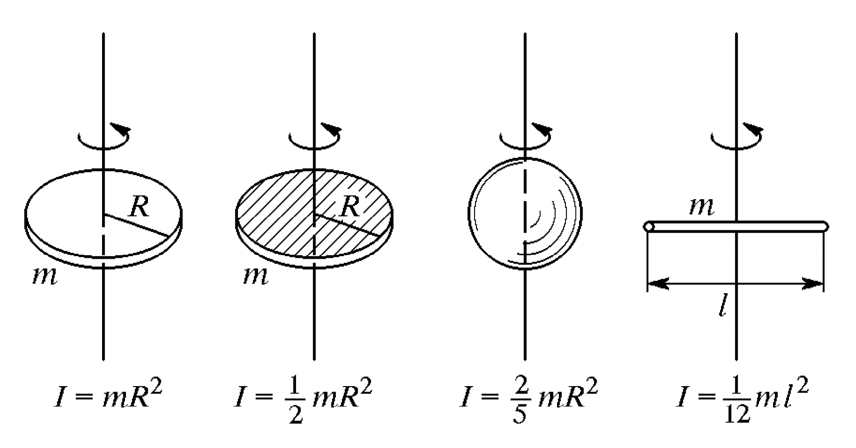


Рис. 154. Моменты инерции различных тел

Момент инерции зависит не только от массы тела, но и от ее распределения (рис. 154). Момент инерции обруча или тонкостенной трубы относительно ее оси равен

$$I = mR^2,$$

так как все элементы Δm_i находятся на одинаковом расстоянии R от оси. Момент инерции сплошного однородного диска или цилиндра равен

$$I = \frac{1}{2}\, mR^2,$$

однородного шара

$$I = \frac{2}{5}\, mR^2,$$

однородного стержня длины l относительно перпендикулярной стержню оси, проходящей через его середину,

$$I = \frac{1}{12}\, ml^2.$$

Момент инерции I относительно проходящей через центр масс оси связан с моментом инерции I' относительно другой параллельной оси, отстоящей на расстояние l (рис. 155), соотношением

$$I' = I + ml^2. \qquad (9)$$

Поясним применение уравнения моментов (7) на следующем простом примере. На массивный барабан радиуса R, который может вращаться вокруг горизонтальной оси O, намотана невесомая нить (рис. 156). К нити приложена сила $\mathbf{F}$. Момент импульса L барабана относительно оси O равен $I\omega$. Момент силы F относительно оси O равен RF. Проекция уравнения моментов (7) на ось O принимает вид

$$I\,\frac{d\omega}{dt} = RF. \qquad (10)$$

Угловое ускорение-барабана пропорционально моменту силы F и обратно пропорционально моменту инерции I. Силу реакции Q под-

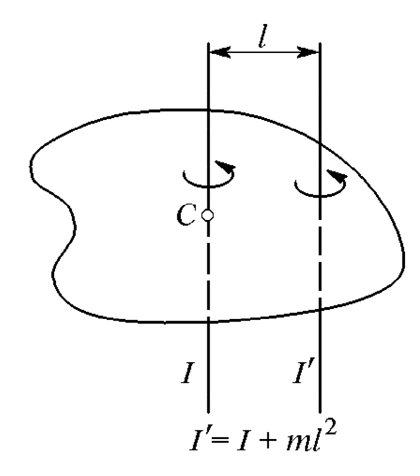


Рис. 155. Моменты инерции относительно параллельных осей

Рис. 156. Раскручивание массивного барабана

шипников, действующую на ось барабана, можно найти из (6), учитывая, что ускорение центра масс равно нулю: $Q = mg + F$.

Кинетическая энергия. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг фиксированной оси, может быть представлена в виде

$$E_к = \frac{1}{2} I\omega^2. \qquad (11)$$

При плоском движении кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс, и кинетической энергии поступательного движения со скоростью V центра масс:

$$E_к = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mV^2, \qquad (12)$$

где I — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. При качении без проскальзывания обруча или тонкостенной трубы кинетическая энергия делится поровну между энергией вращения и энергией поступательного движения, а при качении сплошного однородного цилиндра — в отношении 1 : 2.

Гироскоп. Симметричное тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, называется *гироскопом*. Момент импульса **L** такого тела направлен вдоль оси вращения. В отсутствие моментов внешних сил ось гироскопа сохраняет свое направление в инерциальной системе отсчета. На этом свойстве основано действие приборов, используемых в инерциальных системах навигации. Изменение направления оси гироскопа происходит под действием моментов внешних сил. При не слишком больших моментах сил ось поворачивается медленно, и с хорошей точностью можно считать, что момент импульса **L**

и в этом случае направлен вдоль оси, Это значит, что поведение оси гироскопа, как и поведение вектора $\mathbf{L}$, описывается уравнением момента импульса (7).

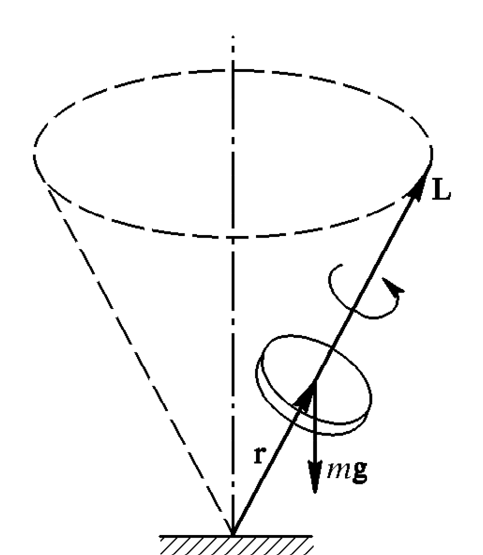


Рис. 157. Прецессия гироскопа

Необычное поведение волчка, не соответствующее интуитивным ожиданиям, объясняется тем, что согласно (7) попытка повернуть ось волчка вызывает движение оси не в направлении приложенной силы, а в перпендикулярном направлении — вдоль вектора момента силы. Так, например, наклоненный вращающийся волчок не опрокидывается под действием силы тяжести, так как она вынуждает его ось медленно двигаться по конусу, сохраняя неизменный наклон.

Покажем это. Пусть ось вращающегося тяжелого волчка отклонена от вертикали (рис. 157). Момент силы тяжести $\mathbf{r} \times m\mathbf{g}$ направлен перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через ось волчка. В соответствии с уравнением момента импульса (7) в этом же направлении получает приращение $\Delta\mathbf{L}$ вектор $\mathbf{L}$ момента импульса волчка:

$$\Delta\mathbf{L} = (\mathbf{r} \times m\mathbf{g})\Delta t.$$

В результате вектор $\mathbf{L}$ (и вместе с ним ось волчка) совершает *прецессию*, т. е. описывает конус, как показано на рис. 157. Момент силы тяжести, опрокидывающей волчок, заставляет его ось поворачиваться в перпендикулярном направлении.

- Как можно задать положение твердого тела в пространстве? Покажите, что твердое тело в общем случае имеет шесть степеней свободы.
- Что такое мгновенная ось вращения и чем она замечательна? Покажите на примерах, что положение мгновенной оси вращения изменяется как в пространстве, так и относительно самого твердого тела.
- Покажите, дифференцируя выражение (3) по времени, что закон изменения момента импульса (4) следует из второго закона Ньютона.
- Покажите, основываясь на определении (3), что при вращении твердого тела вокруг фиксированной оси можно представить проекцию момента импульса на ось вращения в виде $I\omega$, где момент инерции I определяется соотношением (8).
- Докажите формулу (11) для кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг фиксированной оси.
- Объясните, почему волчок под действием опрокидывающей его силы не опрокидывается, а совершает прецессию.

IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Среди разнообразных физических явлений в окружающем нас мире мы часто наблюдаем периодические или почти периодические процессы: восход и заход Солнца, волнение на море, колебания маятника часов, переменный электрический ток, электромагнитные волны, колебания молекул в твердом теле, — примеры можно было бы продолжать до бесконечности.

Признаки колебаний. Колебательные явления обладают общими чертами и даже подчиняются одинаковым закономерностям, несмотря на то, что они могут иметь совершенно разную физическую природу. Самая характерная черта колебательных движений, отличающая их от других явлений, состоит в том, что колебательные движения многократно повторяются или приблизительно повторяются через определенные промежутки времени. Универсальность законов колебательных процессов позволяет с единой точки зрения рассматривать даже различные по физической природе колебания, встречающиеся в разнообразных физических явлениях и технических устройствах.

Любая система, способная совершать колебательное движение, описывается некоторой физической величиной, отклонение которой от равновесного значения зависит от времени по периодическому или почти периодическому закону. Определение периодической функции таково: функция $f(t)$ называется периодической с периодом T, если $f(t+T)=f(t)$ при любом значении t.

В случае механических колебательных процессов, например колебаний груза, подвешенного на пружине, такими величинами являются смещение груза из положения равновесия и его скорость. В случае электрических систем, например колебательного контура, такой величиной является ток в катушке или заряд на обкладках конденсатора.

Особенности физики колебаний. Остановимся на некоторых характерных моментах, связанных с физикой колебательных явлений. Возьмем конкретный пример, скажем струну гитары. Нас могут интересовать сила натяжения струны или скорости различных ее точек в определенный момент времени. Такая постановка задачи типична для динамики. Физика колебаний меняет эту постановку вопроса.

Для нее типичен интерес не к тому, что происходит в данный момент в данном месте, а к общему характеру процесса, взятого в целом за большое время.

Пусть, например, струна издает звук «фа». Этот звук определяется не положением и скоростью точек струны в данный момент, а характером зависимости этих величин от времени. Можно, например, с помощью микрофона превратить этот звук в электрический сигнал и наблюдать его на экране осциллографа. Важно сознавать, что звук, издаваемый струной, определяется формой всей этой кривой в целом. Хотя и говорят: «В данный момент я слышу звук «фа», в действительности дело обстоит не так. Те доли секунды, в течение которых в ухе создается ощущение тона «фа», охватывают большое число максимумов и минимумов этой кривой.

Для физики колебаний характерно рассмотрение процесса в целом, т. е. за время, охватывающее большое число периодов. В физике колебаний особенно ясно проявляется различие между линейными явлениями, для которых справедлив принцип суперпозиции, и нелинейными явлениями, в которых отклик системы не пропорционален оказанному воздействию. Если в линейных системах возможно одновременное протекание сразу нескольких колебательных процессов, не оказывающих никакого влияния друг на друга, то в нелинейных системах взаимодействие таких процессов приводит к качественно новым явлениям. Например, одновременное возбуждение двух колебаний с разными частотами в нелинейной системе приводит к возникновению колебаний на кратных, суммарных и разностных частотах.

§ 41. Собственные колебания

Возьмем простейшую систему, в которой возможны механические колебания. Пусть на пружине жесткости k подвешен груз массы m. Рассмотрим вертикальное движение груза, которое будет происходить под действием силы упругости пружины и силы тяжести, если вывести систему из состояния равновесия и предоставить самой себе.

Простейший осциллятор. Будем считать, что масса пружины настолько мала, что ее можно не учитывать при описании колебаний. Поместим начало отсчета на направленной вниз оси x в точку, соответствующую равновесному положению груза (рис. 158). В этом положении благодаря действию силы тяжести пружина уже растянута на некоторую величину b, определяемую соотношением

$$mg = kb. \qquad (1)$$

При смещении x груза из положения равновесия проекция действующей на тело со стороны пружины силы упругости равна

$-k(x+b)$ в соответствии с законом Гука. Обозначим проекцию ускорения груза a, равную второй производной смешения x по времени, через $\ddot{x}$. Тогда второй закон Ньютона для груза запишется в виде

$$m\ddot{x} = -k(x+b) + mg. \qquad (2)$$

С учетом (1) это уравнение переписывается следующим образом:

$$m\ddot{x} = -kx. \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \qquad (4)$$

Теперь уравнение движения (3) принимает окончательный вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (5)$$

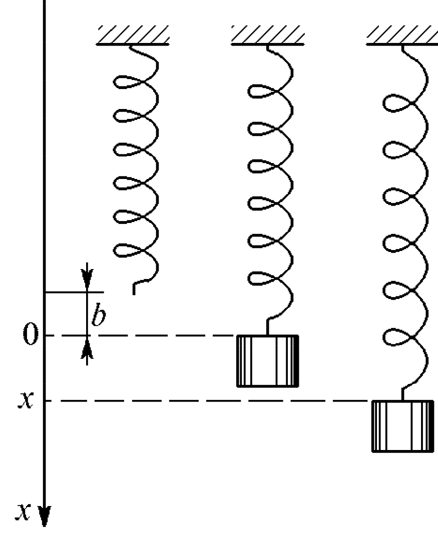


Рис. 158. Положение равновесия и колебания груза на пружине

К точно такому же уравнению мы придем, рассматривая малые колебания около положения равновесия самых разных физических систем: математического маятника — материальной точки, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити (рис. 159*а*), физического маятника — любого твердого тела, которое может поворачиваться вокруг горизонтальной оси под действием силы тяжести (рис. 159*б*), крутильного маятника — диска или коромысла, подвешенного на

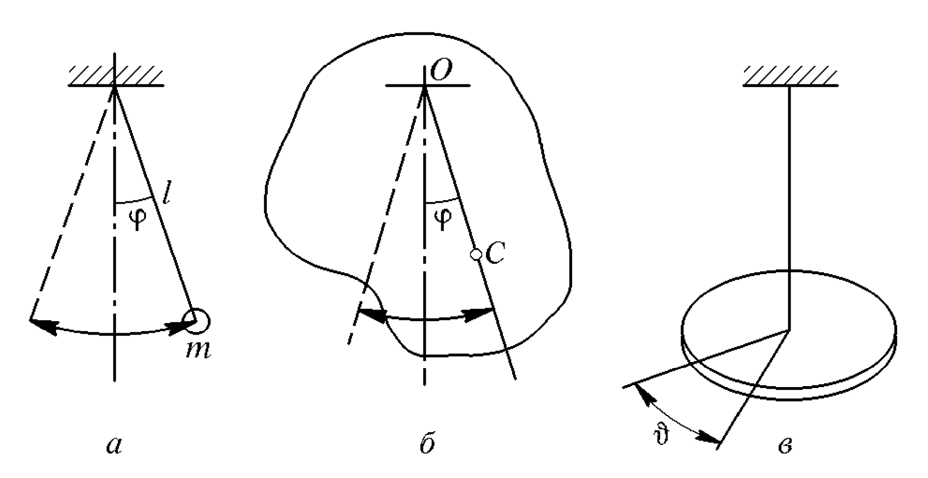


Рис. 159. Разные типы осцилляторов: *а* — простой (математический) маятник, *б* — физический маятник, *в* — крутильный маятник (диск на упругой нити)

упругой нити (рис.159*в*), и т. д. При этом под x в каждом случае следует понимать соответствующую величину, характеризующую отклонение от равновесия: угол φ отклонения от вертикали математического или физического маятника, угол ϑ закручивания упругого подвеса крутильного маятника и т. д.

Гармонические колебания. Колебания в любой физической системе, описываемые уравнением (5), происходят по синусоидальному закону и называются *гармоническими*, а любая совершающая такие

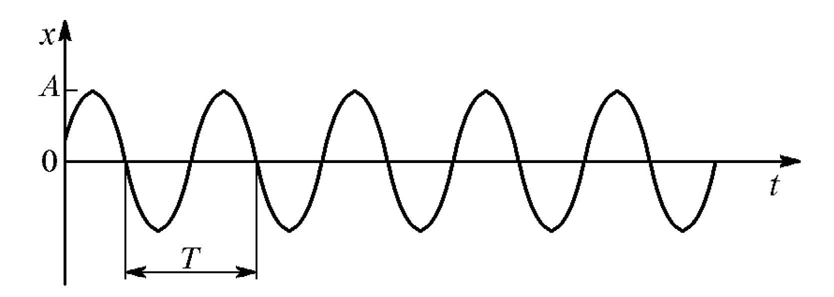


Рис. 160. График гармонического колебния

колебания физическая система — *гармоническим осциллятором*. Решение дифференциального уравнения (5) имеет вид (рис. 160)

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{6}$$

где A и α — произвольные постоянные: при любых значениях A и α функция (6) удовлетворяет уравнению (5). Величина A характеризует максимальное отклонение системы от равновесия и называется *амплитудой* колебаний.

Частота и период. Поскольку косинус — периодическая функция, смещение x принимает одинаковые значения через определенные одинаковые промежутки времени, называемые *периодом колебаний* T. Наряду с периодом T для характеристики колебаний используют также обратную величину $\nu = 1/T$, называемую *частотой*. Частота измеряется в герцах. Герц (Гц) — частота колебания, период которого равен одной секунде. Величина ω_0 называется *циклической частотой* колебаний. Она связана с периодом T и частотой ν соотношением

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

так как период косинуса равен 2π. Циклическая частота ω_0 измеряется в радианах в секунду (рад/с).

Фаза колебаний. Весь аргумент косинуса в (6) называется *фазой* колебаний, а значение фазы при $t = 0$, т. е. постоянная α, — *начальной фазой*. Фаза измеряется в радианах (рад). Зная амплитуду и фазу колебаний, можно по выражению (6) определить механическое состояние системы.

Начальные условия. Значения амплитуды A и начальной фазы α определяются начальными условиями, т. е. способом возбуждения колебаний. Если, например, груз на пружине отклоняют из положе-

ния равновесия на расстояние x_0 и отпускают без толчка, то начальные условия имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = 0.$$

Подставляя эти начальные условия в левую часть (6) при $t = 0$ и в получаемое из (6) выражение для скорости $v(t)$:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \tag{7}$$

приходим к системе уравнений для определения A и α:

$$x_0 = A\cos\alpha, \quad 0 = -A\omega_0 \sin\alpha.$$

Отсюда следует, что $A = x_0$ и $\alpha = 0$, т. е. колебания осциллятора при таком способе возбуждения описываются функцией

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t. \tag{8}$$

Если колебания возбуждают толчком из положения равновесия, мгновенно сообщая грузу начальную скорость v_0, что соответствует начальным условиям $x(0) = 0$, $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$, то для A и α можно получить значения $A = v_0/\omega_0$, $\alpha = -\pi/2$. Колебания в этом случае описываются функцией

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t. \tag{9}$$

Изохронность осциллятора. Частота ω_0 собственных колебаний, в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависит от способа возбуждения, а определяется исключительно свойствами самой системы. В независимости периода колебаний от начальных условий заключается так называемое *свойство изохронности* гармонического осциллятора.

Убедиться в том, что функция (6) является решением уравнения гармонических колебаний (5), можно непосредственной подстановкой. Но можно это сделать и иначе, воспользовавшись удобным графическим методом изображения колебаний.

Векторные диаграммы. Рассмотрим равномерное движение точки по окружности радиуса A с угловой скоростью ω_0 (рис. 161*а*). Пусть в начальный момент радиус-вектор $\mathbf{r}$ этой точки образует угол α с осью x. Спроецируем теперь на эту ось радиус-вектор движущейся точки $\mathbf{r}$, ее скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{a}$. Учитывая, что при равномерном движении точки по окружности ее скорость направлена по касательной, а ускорение — к центру окружности (рис. 161*б*), получаем

$$\begin{gathered} x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \\ v_x(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad a_x(t) = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \alpha). \end{gathered} \tag{10}$$

Мы воспользовались тем, что при движении по окружности модуль скорости v связан с радиусом окружности A и угловой скоростью ω_0 соотношением $v = \omega_0 A$, а модуль ускорения — соотношением

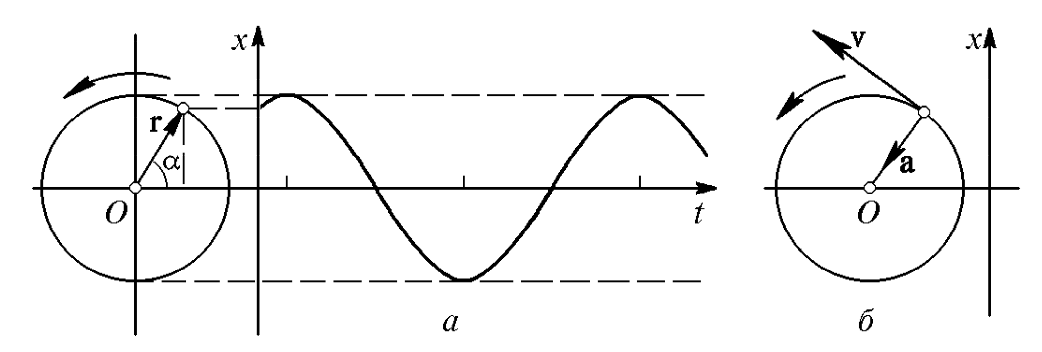


Рис. 161. Связзь гармонических колебаний с равномерным движении по окружности

$a = \omega_0^2 A$. Из формул (10) видно, что проекция ускорения $a_x(t)$ в любой момент времени пропорциональна смещению $x(t)$, точно так же как и в уравнении (3) (или (5)):

$$a_x(t) = -\omega_0^2 x(t). \tag{11}$$

Отсюда следует, что уравнение (5) описывает движение, происходящее по синусоидальному закону (10).

Подчеркнем еще раз, что при гармонических колебаниях любой физической природы, которые происходят по закону (10), частота ω_0 оказывается зависящей только от свойств системы, в которой происходят колебания, но не зависит от амплитуды колебаний. В одной и той же системе могут происходить колебания определенной частоты, которая, например, дается формулами (4), но разной амплитуды. Амплитуда колебаний A и начальная фаза α определяются не свойствами самой системы, а тем способом, каким в системе вызваны колебания. Колебания, происходящие в системе в результате вывода ее из состояния равновесия, после чего система предоставляется самой себе, будем называть *собственными* колебаниями. В отсутствие трения собственные колебания иногда называют *свободными*.

Энергетические превращения. Рассмотрим энергетические превращения, происходящие при свободных гармонических колебаниях.

При механических колебаниях груза на пружине происходит периодическое превращение кинетической энергии движущегося груза $E_к$ и потенциальной энергии $E_п$ системы, которая состоит из потенциальной энергии деформированной пружины и потенциальной энергии груза в поле тяжести. Потенциальная энергия деформированной пружины пропорциональна квадрату ее удлинения $x + x_0$ (см. рис. 158) и, следовательно, равна $k(x + x_0)^2/2$. Потенциальная энергия груза в поле тяжести равна $-mgx + C$.

Выберем для удобства произвольную постоянную C таким образом, чтобы полная потенциальная энергия системы была равна нулю в положении равновесия:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 + C = 0.$$

Тогда $C = -kx_0^2/2$ и потенциальная энергия системы $E_п$ произвольной точке x выражается формулой

$$E_п = \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 - mgx - \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (12)$$

Полная механическая энергия системы $E = E_к + E_п$ при колебаниях остается неизменной, так как система консервативна. В этом можно убедиться и непосредственно, подставляя смещение x и скорость v из (10) в выражение для энергии:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \\ + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2. \qquad (13)$$

Из этой формулы видно, что неизменная полная энергия системы E совпадает с потенциальной энергией $E_п$ в точках наибольшего

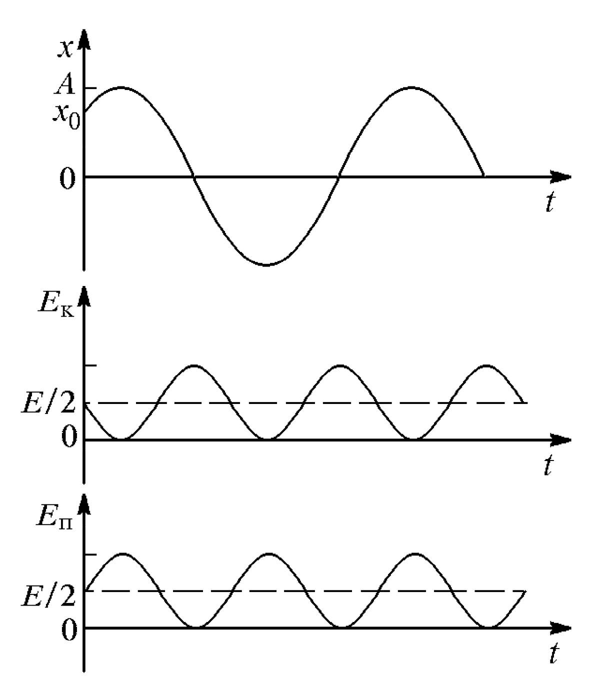


Рис. 162. Графики смещения, кинетической и потенциальной энергий при гармонических колебаниях

отклонения от положения равновесия, т. е. при $x = \pm A$, и совпадает с кинетической энергией $E_к$ при прохождении груза через положение равновесия, где его скорость $v_x = \pm\omega_0 A$.

При взаимных превращениях потенциальная и кинетическая энергия совершают гармонические колебания с одинаковой ампли-

тудой $E/2$ в противофазе друг с другом и с частотой $2\omega_0$. Чтобы убедиться в этом, преобразуем выражения для кинетической и потенциальной энергий с помощью формул для тригонометрических функций половинного аргумента:

$$E_к(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2 (\omega_0 t + \alpha) = \frac{E}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \alpha)],$$
$$E_п(t) = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 (\omega_0 t + \alpha) = \frac{E}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha)]. \qquad (14)$$

На рис. 162 приведены графики зависимости от времени смещения груза $x(t)$, кинетической энергии $E_к(t)$ и потенциальной энергии $E_п(t)$. Штриховыми линиями на этих графиках показаны средние значения кинетической и потенциальной энергии. Эти средние значения равны друг другу и составляют половину полной энергии E.

Фазовые траектории. Построим фазовые траектории для гармонического осциллятора. Уравнение фазовой траектории представляет собой уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv_x^2 = E. \qquad (15)$$

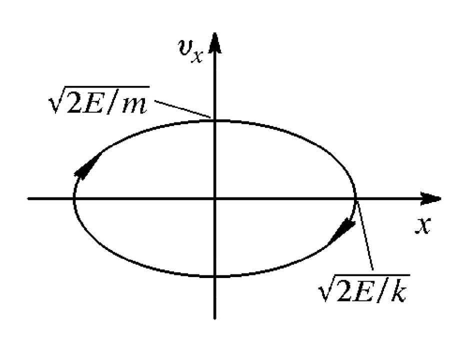


Рис. 163. Фазовая траектория гармонического осциллятора

Разделив обе части уравнения (15) на E, приводим его к виду

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{v_x^2}{2E/m} = 1. \qquad (16)$$

Это уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{2E/k}$ и $\sqrt{2E/m}$ (рис. 163).

При колебаниях состояние осциллятора изменяется таким образом, что изображающая точка движется по эллипсу по часовой стрелке и совершает полный оборот за время, равное периоду колебаний $T = 2\pi/\omega_0$. В этом легко убедиться с помощью формул (10), дающих зависимость x и v_x от времени. Из этих формул, разумеется, можно получить и само уравнение фазовой траектории (16), если исключить из них время. Для этого нужно обе части первой из формул (10) разделить на A, второй — на $\omega_0 A$, возвести получившееся в квадрат и сложить, учитывая, что $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$. В результате получим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v_x^2}{(\omega_0 A)^2} = 1,$$

что совпадает с (16), ибо полную энергию осциллятора Е можно записать в одном из следующих видов:

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

или

$$E = \frac{1}{2}\, m\omega_0^2 A^2.$$

Сопоставим фазовую траекторию осциллятора с графиком потенциальной энергии (рис. 164). На верхней части рисунка изображена потенциальная энергия осциллятора и показаны два значения полной энергии системы E_1 и E_2. На нижней части изображены две фазовые траектории осциллятора, соответствующие колебаниям с такими значениями энергии. Скорость обращается в нуль в тех точках, где потенциальная энергия становится равной полной энергии,

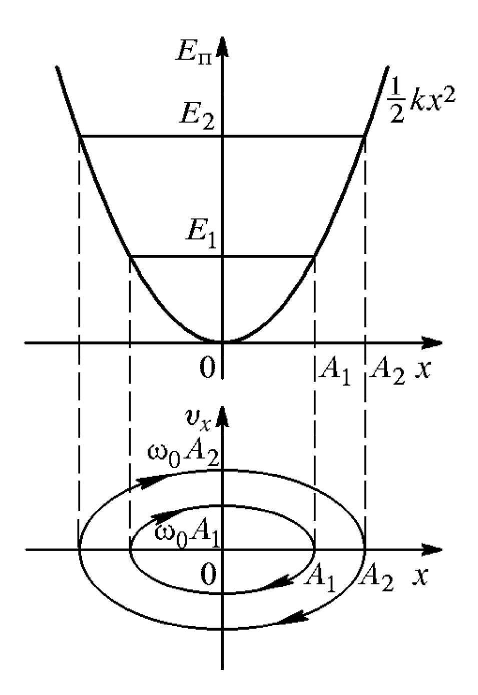


Рис. 164. Потенциальная энергия и фазовая энергия осциллятора

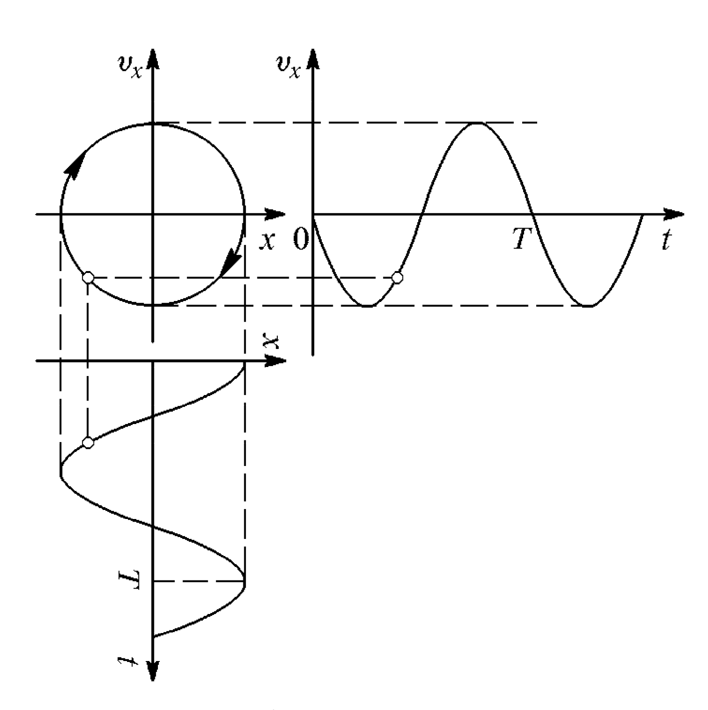


Рис. 165. Связь фазовой траектории осциллятора с графиками смещения скорости

т. е. в точках максимального смещения из положения равновесия. Скорость максимальна при прохождении положения равновесия $x = 0$, где потенциальная энергия обращается в нуль.

Масштаб графика фазовой траектории по оси v_x произволен и не связан с графиком потенциальной энергии. Удобно масштаб графика выбрать так, чтобы одинаковые отрезки соответствовали единице по оси x и ω_0 по оси v_x. Тогда при любой амплитуде колебаний A полуоси эллипса на фазовой диаграмме A и $\omega_0 A$ будут одинаковы и эллипс превратится в окружность (рис. 165). Точка, изображающая состояние осциллятора, движется по этой окружности по часовой стрелке с постоянной скоростью. Из рис. 165 видна связь движения изображающей точки в фазовой плоскости с временной зависимостью координаты $x(t)$ и скорости $v_x(t)$ осциллятора. При построении фазовых диаграмм удобно выбирать масштаб по осям именно таким образом.

- Покажите, что период гармонических колебаний, описываемых формулой (6), связан с их циклической частотой ω_0 соотношением (7).
- Какими физическими условиями определяются частота, амплитуда и начальная фаза собственных колебаний гармонического осциллятора?
- Определите значения амплитуды A и начальной фазы α при возбуждении колебаний осциллятора начальным толчком из положения равновесия.
- Докажите, что изображающая точка на фазовой плоскости для гармонического осциллятора описывает эллипс по часовой стрелке. С какой угловой скоростью поворачивается на фазовой плоскости радиус-вектор изображающей точки?
- Как нужно выбрать масштаб по оси ординат фазовой диаграммы, чтобы фазовая траектория гармонического осциллятора превратилась в окружность?

△ **Линейные и нелинейные системы**. Среди всех систем, в которых возможны колебания, гармонический осциллятор выделяется рядом замечательных особенностей. Прежде всего, как уже отмечалось, это изохронность колебаний, т. е. независимость их периода от амплитуды (или от полной энергии). Например, на рис. 164 изображающие точки обходят оба эллипса, соответствующие разным значениям энергии осциллятора, за одинаковое время.

Чтобы собственные колебания происходили по гармоническому закону, возвращающая сила должна быть пропорциональна смещению из положения равновесия, а потенциальная энергия — квадрату смещения: $F = -kx$, $E_п = kx^2/2$. Такие колебательные системы называются *линейными*, так как их поведение описывается линейным дифференциальным уравнением (5) — в уравнение искомая функция $x(t)$ и ее производная $\ddot{x}$ входят в первой степени.

Реальные физические системы, как правило, такими свойствами не обладают. Например, при больших деформациях пружина уже не подчиняется закону Гука. Однако во всех системах устойчивому положению равновесия соответствует минимум потенциальной энергии. Поэтому поведение потенциальной энергии вблизи этого положения можно аппроксимировать квадратичной зависимостью от смещения. Это значит, что при малых колебаниях вблизи устойчивого равновесия любую систему приближенно можно считать гармоническим осциллятором.

Ранее при обсуждении фазовых диаграмм был рассмотрен маятник в виде материальной точки, подвешенной на легком стержне. Потенциальная энергия маятника при произвольных смещениях из положения равновесия выражалась формулой

$$E_п = mgl(1 - \cos\varphi), \tag{17}$$

или, что то же самое,

$$E_п = 2mgl \sin^2 (\varphi/2). \qquad (17а)$$

При малых значениях аргумента ($\varphi \ll 1$) косинус можно приближенно представить в виде

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \varphi^2.$$

Поэтому при малых φ формула (17) дает квадратичную зависимость потенциальной энергии от угла отклонения:

$$E_п = \frac{1}{2} mgl\varphi^2. \qquad (18)$$

Это же выражение немедленно следует из (17а) с учетом того, что при $\varphi \ll 1$ можно положить $\sin (\varphi/2) = \varphi/2$. Такая аппроксимация потенциальной энергии по казана штриховой линией на рис. 166.

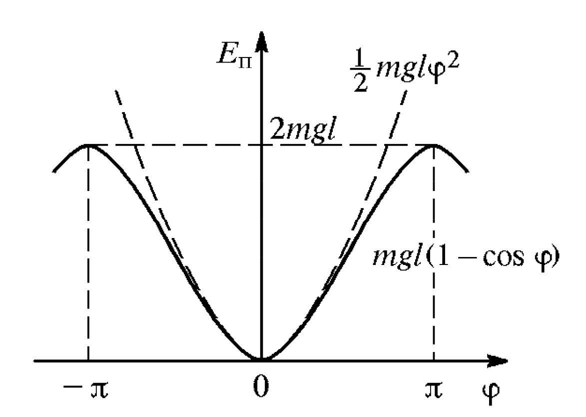


Рис. 166. Потенциальная энергия математического маятника (сплошная линия) и гармонического осциллятора (штриховая линия)

Учитывая, что скорость v материальной точки на конце стержня может быть записана как $l\dot{\varphi}$, для полной энергии при малых смещениях имеем

$$E = \frac{1}{2} ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mgl\varphi^2.$$

Сравнивая эту формулу с (15), видим, что при малых отклонениях от вертикали математический маятник, т. е. подвешенный на легком стержне грузик, представляет собой гармонический осциллятор. Период его колебаний не зависит от амплитуды.

Легко написать формулу, выражающую частоту ω_0 малых собственных колебаний маятника через его параметры. Квадрат частоты собственных колебаний осциллятора, определяемый формулой (4), равен отношению коэффициентов при квадратах смещения и скорости в выражении (15) для полной энергии осциллятора. Такое отношение для математического маятника в соответствии с (19) равно

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad (20)$$

Для периода собственных колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ отсюда получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (21)$$

Уравнение колебаний системы, энергия которой дается выражением (19), имеет вид (5), где под x следует понимать угол φ

отклонения от вертикали:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \tag{22}$$

Обратим внимание на то, что период колебаний математического маятника оказался не зависящим от его массы. Так получилось потому, что масса входит множителем в коэффициенты как при φ^2, так и при $\dot{\varphi}^2$ в выражении (19) для энергии маятника и сокращается при переходе к (20). Следует, однако, отдавать себе отчет в том, что фактически в выражение для потенциальной энергии входит тяжелая (гравитационная) масса $m_{\text{г}}$, а в выражение для кинетической энергии — инертная масса $m_{\text{ин}}$. Поэтому сокращение масс при получении формулы (20) для частоты возможно только при условии их пропорциональности. Таким образом, независимость периода колебаний математического маятника от массы груза, которая с высокой точностью подтверждается на опыте, служит еще одним экспериментальным подтверждением эквивалентности инертной и гравитационной масс.

Ангармонический маятник. При больших амплитудах колебания маятника описываются нелинейным уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \tag{23}$$

Угол отклонения $\varphi(t)$ входит в него как аргумент функции синуса. Поскольку при малых углах $\sin \varphi = \varphi$, то (23) в случае малых колебаний переходит в уравнение гармонического осциллятора (22). Описываемые уравнением (23) колебания являются ангармоническими: их период зависит от амплитуды φ_{m}. Приближенная формула для периода ангармонических колебаний маятника имеет вид

$$T = T_0\left(1 + \frac{\varphi_{\text{m}}^2}{16}\right),$$

где T_0 соответствует малым гармоническим колебаниям и дается формулой (21).

- Почему малые колебания вблизи положения устойчивого равновесия в любых системах можно приближенно считать гармоническими?
- Объясните, почему физическая система, выражение для энергии которой имеет вид (19) или (15), представляет собой гармонический осциллятор.
- Каким образом можно использовать маятник для экспериментальной проверки равенства инертной и гравитационной масс?
- Как получить дифференциальное уравнение (23), описывающее ангармонические колебания математического маятника? ▲

§ 42. Затухающие колебания

Свободные колебания, рассмотренные в предыдущем параграфе, представляют собой некоторую идеализацию. В реальных системах механическое движение всегда сопровождается трением. Наличие трения приводит к рассеянию, или, как говорят, к *диссипации* механической энергии. Диссипация энергии колебаний происходит в любых реальных колебательных системах, вызывая затухание собственных колебаний.

Осциллятор с затуханием. Рассмотрим затухающие механические колебания подробнее. Часто при движении тела в среде действующую на него силу сопротивления при малых скоростях можно считать пропорциональной скорости:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\beta\mathbf{v}. \tag{1}$$

Эту силу следует учесть в уравнении второго закона Ньютона, описывающего движение тела. Например, уравнение (3) предыдущего параграфа, описывающее вертикальные колебания груза, подвешенного на пружине, при наличии трения будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}, \tag{2}$$

где через $\dot{x}$ обозначена производная смещения x по времени, т. е. проекция скорости тела. Вводя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{\beta}{m}, \tag{3}$$

перепишем уравнение (2) следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{4}$$

Такой же вид имеет уравнение, описывающее малые собственные колебания в любой физической системе, затухающие из-за силы сопротивления, пропорциональной скорости.

Диссипация энергии. Не будем пока решать уравнение (4), а попробуем выяснить, как влияет наличие сопротивления на колебательное движение. Будем при этом считать, что затухание мало настолько, что связанная с ним потеря энергии системы за период колебания мала по сравнению с энергией колебаний. Согласно закону сохранения энергии изменение механической энергии системы равно работе силы трения:

$$\Delta E = \mathbf{F}_{\text{тр}} \cdot \Delta\mathbf{r}.$$

Подставляя сюда силу трения из (1) и учитывая, что $\Delta x = v_x \Delta t$, получаем

$$\Delta E = -\beta v_x \, \Delta x = -\beta v_x^2 \, \Delta t. \tag{5}$$

Из соотношения (5) в пределе при $\Delta t \to 0$ видно, что скорость изменения энергии колебаний dE/dt пропорциональна квадрату скорости и поэтому может быть выражена через кинетическую энергию $E_к = mv_x^2/2$:

$$\frac{dE}{dt} = -\beta v_x^2 = -\frac{2\beta}{m}\frac{mv_x^2}{2} = -\frac{2\beta}{m}E_к. \qquad (6)$$

Из формулы (6) видно, что диссипация энергии в течение периода колебаний происходит неравномерно, так как кинетическая энергия $E_к$ осциллирует. Но мы хотим составить уравнение, описывающее монотонное убывание энергии за время, содержащее много периодов колебаний. Очевидно, что это уравнение будет иметь такой же вид, как и (6), только в правой его части следует взять не мгновенное, а среднее за период значение кинетической энергии $\langle E_к \rangle$:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2\beta}{m}\langle E_к \rangle. \qquad (7)$$

Подчеркнем, что это уравнение уже нельзя применять для промежутков времени, меньших периода колебаний. Ввиду малости затухания можно считать, что среднее за период значение кинетической энергии, как и при свободных колебаниях, равно половине полной энергии осциллятора: $\langle E_к \rangle = E/2$. Подставляя это значение $\langle E_к \rangle$ в (7) и используя обозначения (3), получаем

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E. \qquad (8)$$

Формула (8) показывает, что скорость изменения энергии $\langle dE/dt \rangle$, характеризующая «сглаженное» поведение энергии колебаний, когда нас не интересуют детали ее изменения на протяжении одного периода

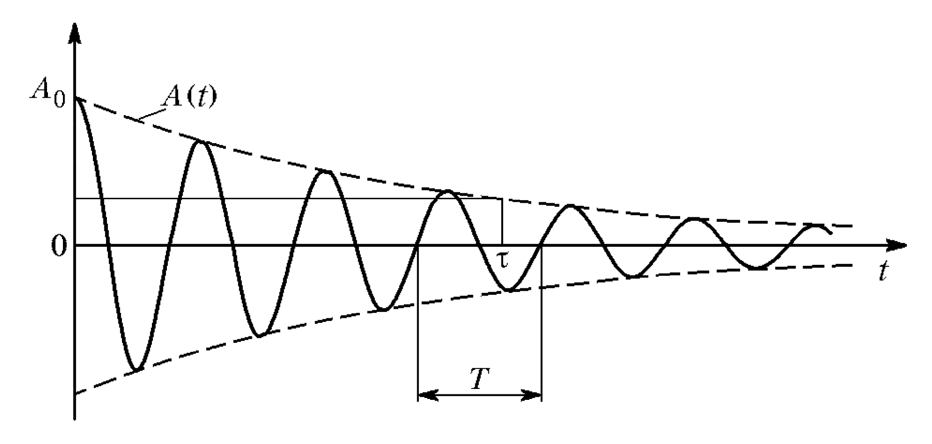


Рис. 167. График затухающих колебаний

колебаний, пропорциональна самой энергии E. Решение уравнения (8) показывает, что энергия осциллятора $E(t)$ убывает по экспоненциальному закону:

$$E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \qquad (9)$$

Здесь E_0 — значение энергии системы в начальный момент времени. Но энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому изменение амплитуды колебаний за большие по сравнению с периодом промежутки времени дается выражением

$$A = A_0 \exp(-\gamma t), \tag{10}$$

где A_0 — начальная амплитуда колебаний. Зависимость амплитуды от времени показана штриховой линией на рис. 167.

Время жизни колебаний. Как видно из (10), амплитуда убывает в e раз за время τ, равное $1/\gamma$, независимо от начального значения амплитуды. Это время τ носит название *времени жизни колебаний*, хотя, как видно из формулы (10), колебания продолжаются бесконечно долго. Использованное нами предположение о малости затухания означает, что время жизни колебаний τ велико по сравнению с периодом T: $\tau \gg T$. Другими словами, за время τ происходит большое число колебаний. Отметим, что в данном случае движение, строго говоря, не является периодическим. Под периодом колебаний T здесь условно понимают промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями от равновесия.

Фазовая траектория. Фазовая траектория затухающего колебания при наличии трения, пропорционального скорости, приведена на рис. 168. Она представляет собой незамкнутую кривую — спираль, закручивающуюся вокруг начала координат. При малом затухании, когда осциллятор за время жизни τ успевает совершить большое число колебаний, такое же число витков накручивает спираль на фазовой плоскости.

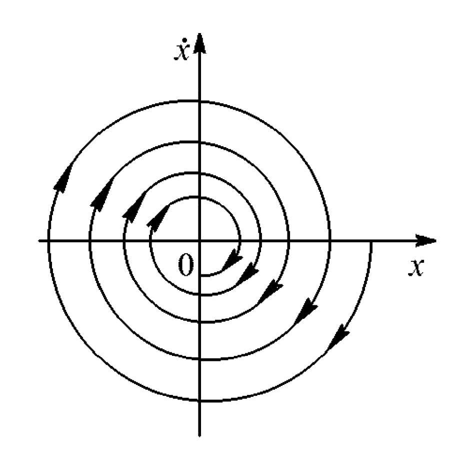


Рис. 168. Фазовая траектория затухающего осциллятора

Затухание колебаний влияет и на период, приводя к его возрастанию по сравнению с периодом свободных колебаний в той же системе. Однако при малом затухании увеличение периода колебаний очень мало. При сильном затухании колебаний вообще может не быть: выведенная из равновесия система вследствие большого трения будет апериодически, т. е. без осцилляций, приближаться к положению равновесия. Так будет при $\gamma > \omega_0$.

Точное решение. Уравнение затухающих колебаний (4) имеет точное решение. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что оно имеет вид

$$x(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \tag{11}$$

где A_0 и α — произвольные постоянные, значения которых определяются из начальных условий. При малом затухании, когда $\gamma \ll \omega_0$, частота ω_1 практически совпадает с частотой свободных колебаний ω_0, а стоящий перед косинусом множитель $A_0 \exp(-\gamma t)$ можно рассматривать как медленно меняющуюся со временем амплитуду колебаний.

Экспоненциальный характер затухания колебаний связан с тем, что вызывающая это затухание сила трения пропорциональна скорости. При другой зависимости силы трения от скорости закон затухания колебаний будет иным.

Сухое трение. Рассмотрим случай сухого трения, когда от скорости зависит только направление силы трения, а ее модуль практически постоянен. Пусть на горизонтальный стержень насажен просверленный по диаметру шар массы m, прикрепленный к пружине жесткости k (рис. 169). Сила трения, равная μmg, направлена в сторону, противоположную скорости $\dot{x}$. Поэтому уравнение движения шара записывается следующим образом:

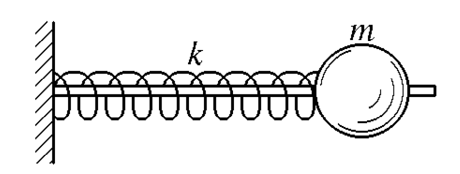


Рис. 169. Осциллятор с сухим трением

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - \mu mg \quad \text{при} \quad \dot{x} > 0, \\ m\ddot{x} &= -kx + \mu mg \quad \text{при} \quad \dot{x} < 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Таким образом, для нахождения движения шара необходимо решать два уравнения, которые сменяют друг друга, когда меняется направление движения шара, т. е. знак проекции скорости $\dot{x}$. Пусть в начальный момент шар смещен из положения равновесия влево на некоторое расстояние A, а скорость его равна нулю. Если при этом упругая сила пружины меньше, чем максимально возможное значение силы трения покоя μmg, то шар будет оставаться в покое и дальше.

Область застоя. Итак, вблизи положения равновесия $x = 0$, соответствующего ненапряженной пружине, существует область «застоя» шириной $2\mu mg/k$, в любой точке которой шар может находиться в покое. Если же начальное смещение сдвинутого влево шара A больше, чем $\mu mg/k$, то отпущенный шар начнет двигаться направо и его движение будет определяться первым из уравнений (12). Это уравнение описывает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Наличие постоянной силы в правой части этого уравнения, не меняя частоты колебаний, приводит к сдвигу положения равновесия (вспомним, что в разобранном выше примере колебаний груза на пружине в поле тяжести колебания происходят

с той же частотой, что и в невесомости, но около нового положения равновесия).

Записывая первое из уравнений (10) в виде

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0), \tag{13}$$

находим, что сдвиг положения равновесия x_0, т. е. средней точки, относительно которой происходят описываемые этим уравнением колебания, равен

$$x_0 = -\frac{\mu m g}{k}.$$

Так как $x_0 < 0$, то положение равновесия смещено влево. Оно совпадает с левой границей области застоя. После того как шар дойдет до крайнего правого положения и его скорость обратится в нуль, он начнет двигаться налево, проекция скорости $\dot{x}$ станет меньше нуля и движение шара будет определяться вторым из уравнений (12). Это уравнение, в свою очередь, описывает гармонические колебания с той же частотой ω_0, происходящие около другого положения равновесия, сдвинутого относительно точки $x = 0$ на то же расстояние в противоположную сторону. После того как шар придет в крайнее левое положение, дальнейшее его движение будет снова описываться первым из уравнений (12) и т. д.

Сшивание решений. Зависимость смещения шара от времени $x(t)$ показана на рис. 170. Сначала шар идет слева направо, чему соответствует отрезок синусоиды AB, изображающий незатухающие колебания около среднего положения $-\mu mg/k$. Движение

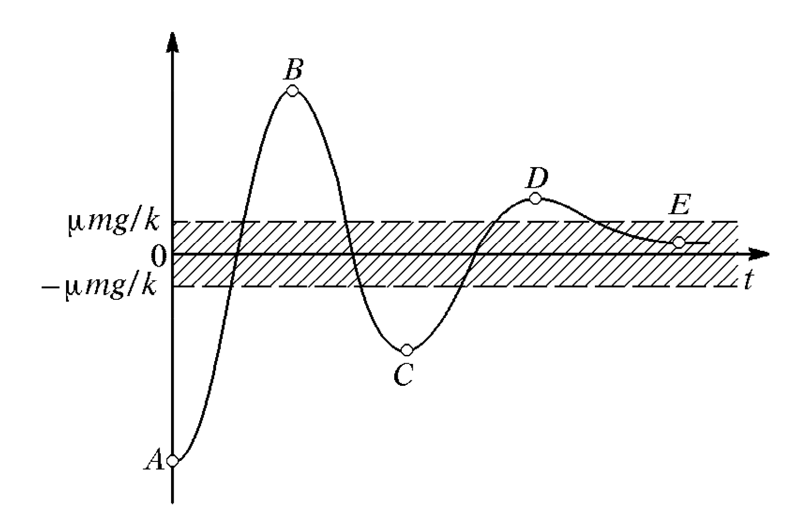


Рис. 170. График затухающих колебаний при сухом трении

справа налево изображается отрезком синусоиды BC, соответствующим колебанию около среднего положения $\mu mg/k$, и т. д. В результате чередования кусков синусоид, описывающих незатухающие колебания около двух чередующихся положений равновесия, получается кривая, описывающая затухающее движение.

Очевидно, что рано или поздно скорость шара обратится в нуль в тот момент, когда он будет находиться внутри области застоя (точка E на рис. 170), и на этом его движение прекратится. В отличие от затухающих колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости, где амплитуда убывает экспоненциально и колебания, строго говоря, продолжаются бесконечно долго, здесь амплитуда убывает линейно и колебания полностью прекращаются за конечное время.

Фазовая траектория. Наглядное представление о рассмотренных колебаниях при наличии сухого трения можно получить и с помощью фазовой диаграммы (рис. 171). Начальное состояние изображается точкой A на оси x. Движению шара слева направо соответствует часть фазовой траектории AB, представляющая собой половину окружности, центр которой находится на оси x в точке $-\mu mg/k$. Дальнейшему движению справа налево соответствует половина окружности BC, центр которой находится в точке $\mu mg/k$ на оси x, и т. д. Вся фазовая траектория состоит из таких половинок окружностей с чередующимися центрами. Она обрывается в точке E на оси x, как только достигнет области застоя.

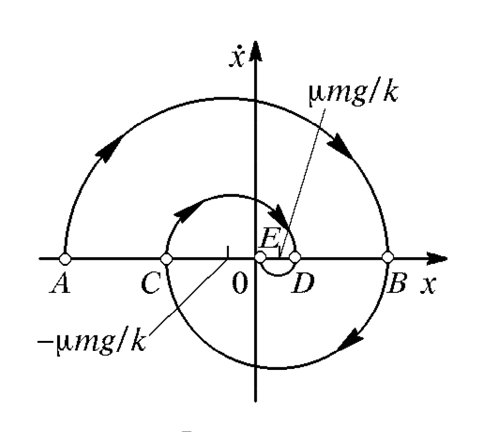


Рис. 171. Фазовая траектория затухающих колебаний при сухом трении

Погрешности стрелочных приборов. Рассмотренные особенности затухающих колебаний позволяют понять происхождение погрешностей у стрелочных измерительных приборов, связанных с успокоением их подвижной системы при измерениях. Неизбежно присутствующее сухое трение приводит к существованию области застоя около положения равновесия стрелки прибора при проведении измерения. Из рис. 170 и 171 видно, что остановка после колебаний может произойти в любой точке области застоя в зависимости от начальных условий. Поэтому остановка стрелки прибора происходит не точно на том делении шкалы, которое соответствует измеряемой величине, а в какой-либо точке области застоя вблизи этого деления.

Для уменьшения погрешности измерений сухое трение стремятся свести к минимуму. Один из способов уменьшения сухого трения — применение смазки. При этом трение становится пропорциональным скорости и затухание происходит в соответствии с законом (11). Стрелка при этом должна остановиться в положении равновесия. Чтобы успокоение подвижной системы прибора не происходило слишком долго, применяются так называемые демпфирующие устройства, гасящие колебания. Эти устройства не должны ухуд-

шать точность прибора, поэтому вводимое ими трение должно быть пропорционально скорости.

- Покажите, что при собственных колебаниях осциллятора с трением, пропорциональным скорости, амплитуда колебаний убывает экспоненциально.
- Какой физически смысл имеет параметр τ, называемый временем жизни колебаний?
- При каком соотношении между коэффициентами в уравнении (4), описывающем осциллятор с трением, пропорциональным скорости, движение будет апериодическим?
- Каков характер последовательностей, которые образуют последовательные максимальные смещения из положения равновесия для затухающих колебаний при трении, пропорциональном скорости, и при сухом трении? Что можно сказать о полном числе колебаний до остановки в каждом из этих случаев?
- Опишите различие фазовых траекторий затухающего осциллятора, изображенных на рис. 168 и 171.

△ **Идеализации в принятой модели.** При изучении колебаний, как и любого другого физического явления, мы всегда вынуждены упрощать рассматриваемую систему, стремясь, тем не менее, сохранить в выбранной идеализированной модели наиболее важные черты явления. Однако никакую идеализацию нельзя продолжать до бесконечности, нужно всегда отдавать себе отчет, до каких пределов остается справедливой выбранная модель. Но и в рамках выбранной модели иногда еще остаются вопросы, связанные с условиями применимости приближений, использованных при конкретных расчетах.

Проанализируем с этой точки зрения те приближения, которые были использованы выше при изучении колебаний груза, подвешенного на упругой пружине. Задумаемся над вопросом, в чем смысл сделанного там предположения о малости массы пружины по сравнению с массой груза. Ведь при выводе уравнения движения груза (5) предположение об этом, казалось бы, нигде не использовалось. Действительно, мы воспользовались вторым законом Ньютона для груза (2), в который входит масса груза m, но не входит масса пружины. Однако уравнение колебаний груза (5) все-таки справедливо лишь тогда, когда масса пружины достаточно мала.

На первый взгляд может показаться, что дело здесь только в том, что массивная пружина будет растянута еще и под действием собственной тяжести, так что действующая на груз со стороны пружины сила уже не будет равна $k(x + x_0)$, как в уравнении (2). Однако это совсем не так. И при горизонтальном расположении пружины (см. рис. 169) в отсутствие трения уравнение (5)

справедливо лишь тогда, когда масса пружины мала по сравнению с массой груза. В противном случае нужно учитывать движение самой пружины. В самом деле, при получении закона движения (5) предполагается, что если конец пружины оттянут на расстояние x, то действующая на груз сила равна $-kx$. Но это верно только в статическом случае, если пружина растягивается достаточно медленно.

При ускоренном движении груза (а следовательно, и пружины) пружина в разных своих частях растянута по-разному и ее растяжение уже не пропорционально силе. Пружина уже не ведет себя квазистатически: она сама может колебаться как система с распределенными параметрами. Но если масса пружины мала по сравнению с массой прикрепленного к ней груза, то можно не считаться с этими колебаниями, так как они «быстрые» по сравнению с колебаниями груза на пружине и очень скоро затухают.

В самом деле, частота колебаний груза, как видно из (4), пропорциональна квадратному корню из отношения жесткости пружины к массе груза. При оценке частоты собственных колебаний пружины можно считать, что ее зависимость от жесткости пружины и массы имеет такой же вид. Поэтому при малой массе пружины частота колебаний велика по сравнению с частотой колебаний груза. Если для простоты предположить, что число колебаний за время их жизни одинаково по порядку величины как для колебаний груза, так и для колебаний пружины, то затухание высокочастотных колебаний пружины происходит за значительно меньшее время,чем затухание колебаний груза. Поэтому такие колебания пружины могли бы сыграть роль только в первый момент, когда они еще не затухли.

Если в начальный момент пружина деформирована однородно, то эти колебания вообще не возникают (разумеется, при условии, что масса пружины много меньше массы груза). Если же в начальный момент пружина деформирована неоднородно, то такие быстрые колебания пружины как распределенной системы обязательно возникнут, но быстро затухнут, так что за время существования этих колебаний груз еще не успеет заметно сдвинуться с места. Что же может произойти в системе из-за этих колебаний?

Неоднородная деформация пружины. Проделаем такой опыт. Захватим пружину, изображенную на рис. 169, за середину и растянем ее левую половину на некоторое расстояние x_0 (рис. 172). Вторая половина пружины остается в недеформированном состоянии, так что груз в начальный момент смещен из положения равновесия вправо на расстояние x_0 и покоится. Затем пружину отпустим. К каким особенностям приведет то

обстоятельство, что в начальный момент пружина деформирована неоднородно?

Если бы при смещении груза на x_0 пружина была деформирована однородно, движение груза в отсутствие трения представляло бы собой гармоническое колебание около положения равновесия с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ и амплитудой x_0:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t.$$

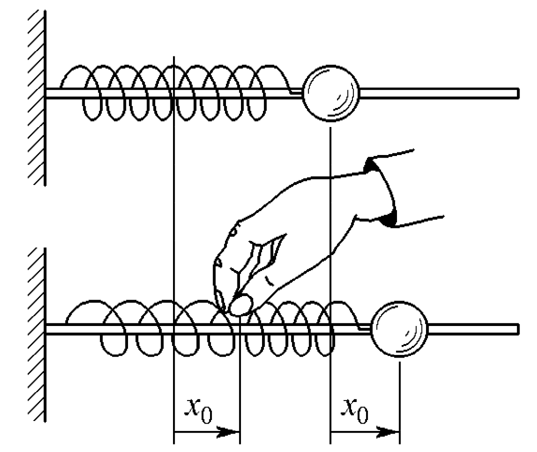


Рис. 172. В начальный момент растянута только левая половина пружины

Начальная фаза колебаний в формуле (14) равна нулю, поскольку при $t = 0$ груз смещен из положения равновесия на расстояние x_0, равное амплитуде колебаний. Однако в нашем случае пружина в начальный момент деформирована неоднородно — разные части пружины деформированы по-разному.

Энергия осциллятора и быстрые колебания. При однородной начальной деформации пружины запас механической энергии системы равен $kx_0^2/2$. При начальных условиях нашей задачи, когда растянута на x_0 половина пружины, запас энергии равен $2kx_0^2/2$, ибо, как нетрудно сообразить, жесткость половины пружины равна $2k$. После затухания быстрых колебаний сила натяжения в пружине перераспределяется, а смещение груза остается приблизительно равным x_0, так как груз за это время не успевает заметно сдвинуться. Деформация пружины становится однородной, а энергия системы становится равной $kx_0^2/2$.

Таким образом, роль быстрых колебаний пружины свелась к тому, что запас энергии системы уменьшился до того значения, которое соответствует однородной начальной деформации пружины. Ясно, что дальнейшие процессы в системе не отличаются от случая однородной начальной деформации. Зависимость смещения груза от времени $x(t)$ выражается той же самой формулой (14). Напомним еще раз, что приведенное рассуждение справедливо при условии, что время затухания быстрых колебаний пружины много меньше периода колебаний груза на пружине.

Теперь представим себе, что, не разобравшись в особенностях начальных условий, мы прямо применили закон сохранения механической энергии! Закон механической энергии универсален. Но для его правильного применения нужна исчерпывающая «бухгалтерия»: необходимо тщательно разобраться, какие превращения энергии возможны в рассматриваемом явлении.

Таким образом, использованная при рассмотрении колебаний груза на пружине модель правильно описывает систему лишь в отсутствие колебаний пружины как распределенной системы. Несмотря на то, что эти колебания быстро прекращаются и не влияют на дальнейшее движение груза, они могут сильно отразиться на энергетических превращениях в системе.

- В чем проявляется неоднородность начальной деформации пружины при собственных колебаниях подвешенного на ней груза?
- Придумайте пример такой начальной деформации пружины, при которой большая часть энергии ее деформации превращается в теплоту, а не в энергию колебаний. ▲

§ 43. Собственные колебания в разных физических системах

Рассмотрим на конкретных примерах проявления общих закономерностей физики собственных колебаний, представив этот материал в виде отдельных задач.

Задачи

1. *Смещенное равновесие.* В условиях задачи о падении кольца на прикрепленный к пружине диск найдите частоту и амплитуду колебаний диска вместе с прилипшим к нему кольцом.

Решение. Очевидно, что дополнительный груз в виде прилипшего к диску кольца приводит к дополнительному смещению вниз на mg/k положения равновесия, которое и до того было смещено весом самого диска. Этот сдвиг положения равновесия не влияет на частоту собственных колебаний, как это было выяснено в § 41. Частота колебаний ω_0 определяется отношением жесткости пружины к полной массе висящего на ней груза, поэтому

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}. \qquad (1)$$

Легко сообразить, что амплитуда колебаний равна квадратному корню в выражении (3) приведенного выше решения этой задачи, поскольку именно этот корень дает значение максимального смещения диска вверх и вниз относительно нового положения равновесия, которое сдвинуто от старого вниз на mg/k. Таким образом,

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2gh}{k(m+M)}}. \qquad (2)$$

Для нахождения амплитуды колебаний, в принципе, не было необходимости обращаться к упомянутой формуле (3). Выяснив, что в системе возникают собственные гармонические колебания с частотой (1), можно непосредственно записать общее выражение для смещения $x(t)$ из нового положения равновесия:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (3)$$

Значение скорости $v(t)$ в любой момент времени получается из (3) дифференцированием функции $x(t)$ по времени:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin\,(\omega_0 t + \alpha). \tag{4}$$

Для нахождения амплитуды A и начальной фазы α следует подставить в (3) и (4) начальные условия, т. е. смещения $x(0)$ и скорости $\dot{x}(0)$ при $t = 0$, соответствующему моменту прилипания падающего кольца к диску. Если ось x направлена вниз, то начальное смещение $x(0)$ равно, очевидно, $-mg/k$:

$$x(0) = -\frac{mg}{k}. \tag{5}$$

Начальное значение скорости $v(0)$ можно, как и раньше, определить, применяя закон сохранения импульса для неупругого удара кольца о диск:

$$v(0) = \dot{x}(0) = V = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh} \tag{6}$$

Таким образом, для нахождения A и α получаем следующую систему уравнений:

$$A\cos\alpha = -\frac{mg}{k}, \quad -A\omega_0 \sin\alpha = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}. \tag{7}$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая почленно, приходим с учетом (1) к формуле (2) для амплитуды колебаний. Разделив почленно второе из уравнений (7) на первое, получаем значение тангенса начальной фазы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{k}{m+M}} = \omega_0\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{8}$$

2. *Осциллятор с двумя пружинами.* С какой частотой ω_0 будет совершать малые вертикальные колебания в поле тяжести груз массы m, подвешенный на двух одинаковых пружинах жесткости k, образующих в равновесии углы β с вертикалью (рис. 173)?

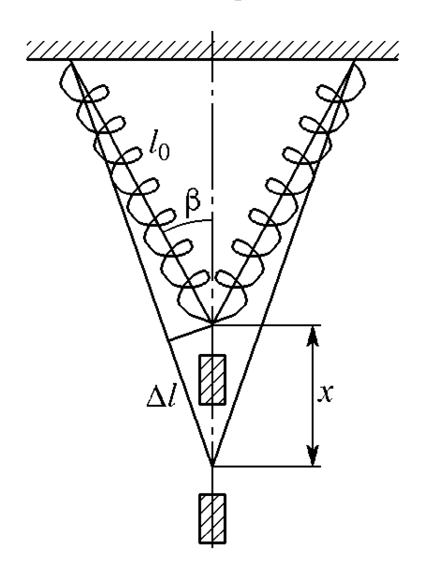


Рис. 173. Колебания груза на двух пружинах

Решение. Интуитивно ясно, что при смещении груза из положения равновесия по вертикали вниз или вверх в системе возникнут колебания около положения равновесия. Чтобы найти частоту этих колебаний, нужно установить связь между смещением груза из положения равновесия и возникающей при этом возвращающей силой.

Пусть, например, груз смещен вниз на малое расстояние x. Из рис. 173 видно, что дополнительное удлинение Δl каждой из пружин при этом будет связано со смещением x груза по вертикали соотношением

$$\Delta l = x\cos\beta. \tag{9}$$

Возникающая при таком растяжении дополнительная сила упругости $k\,\Delta l$ в каждой из пружин направлена вдоль ее оси, а их равнодействующая $\mathbf{F}$ направлена вертикально вверх и по модулю равна

$$F = 2k\,\Delta l\cos\beta. \tag{10}$$

Подставляя сюда Δl из (9), получаем связь возвращающей силы со смещением x груза. Поскольку равнодействующая сила направлена противоположно смещению, эта связь имеет вид

$$F_x = -(2k \cos^2 \beta) x. \qquad (11)$$

Мы видим, что при малых смещениях возвращающая сила направлена к положению равновесия и пропорциональна смещению. Поэтому для частоты колебаний ω_0 можно написать

$$\omega_0^2 = \frac{2k \cos^2 \beta}{m}. \qquad (12)$$

Отметим, что рассмотренная простейшая физическая модель данной системы в действительности содержит ряд тонких моментов, заслуживающих более подробного обсуждения.

Условия применимости модели. В приведенном выше решении был рассмотрен случай малых колебаний. В каких пределах справедливо это приближение, или, другими словами, при каких максимальных амплитудах колебания еще остаются гармоническими и их частота определяется формулой (12)?

Прежде всего, обратим внимание на то, что для применимости принятой модели при колебаниях груза пружины должны все время оставаться в растянутом состоянии. В противном случае, когда при движении вверх от положения равновесия растяжение пружин сменяется их сжатием, возможно отклонение системы из вертикальной плоскости, сопровождающееся поперечными раскачиваниями. Ограничения на амплитуду колебаний, накладываемые этой причиной, оценить очень просто. Очевидно, что смещения груза вверх при колебаниях не должны превосходить первоначального сдвига положения равновесия вниз под действием силы тяжести. Если растяжение пружин весом груза мало по сравнению с их длиной в недеформируемом состоянии, то вызванный весом груза сдвиг вниз x_m можно оценить по той же формуле (11), подставляя в нее mg в качестве действующей силы:

$$x_m = \frac{mg}{2k \cos^2 \beta}. \qquad (13)$$

Другое ограничение на допустимую амплитуду колебаний связано с применимостью линейного по смещению x выражения (11) для возвращающей силы. Для исследования этих ограничений будем считать, что груз может скользить без трения по вертикальным направляющим (чтобы не думать об ограничениях, накладываемых условием (13)), и рассмотрим вертикальные смещения груза, не считая их малыми (см. рис. 173).

Обозначив через l длину растянутой пружины при смещении груза на расстояние x вниз, а через l_0 — длину пружины, когда груз находится в положении равновесия, с помощью теоремы косинусов можно написать

$$l = \sqrt{l_0^2 + x^2 + 2l_0 x \cos \beta}. \qquad (14)$$

Здесь x может быть любым. Будем, однако, считать, что смещение x все же мало по сравнению с длиной l_0 пружины в положении равновесия. А именно, предположим, что

$$x \ll 2l_0 \cos \beta. \qquad (15)$$

Тогда в (14) можно пренебречь в подкоренном выражении слагаемым x^2 и, используя приближенную формулу $\sqrt{1+a} = 1 + a/2 (a \ll 1)$, записать удлинение пружины в виде

$$\Delta l = l - l_0 = x \cos \beta. \quad (16)$$

Это выражение совпадает с (9), записанным в предположении «малых» смещений x.

Таким образом, условие малости смещений, при которых справедливо выражение (9), дается формулой (15). При выполнении условия (15) связь между возвращающей силой и смещением можно считать линейной (формула (11)), а осциллятор — гармоническим. Значения смещений x, при которых справедливо (15), не должны превосходить значения x_m, даваемого формулой (13). В противном случае реальное поведение груза на пружинах кроме гармонических колебаний в плоскости пружин будет включать в себя поперечное раскачивание.

3. *Туннель сквозь земной шар.* В земном шаре прорыт прямой туннель, соединяющий две точки на его поверхности. Сколько времени будет двигаться в таком туннеле от одного конца до другого поезд с выключенными двигателями, если пренебречь трением и влиянием вращения Земли?

Р е ш е н и е. Характер движения поезда в отсутствие трения определяется лишь проекцией силы тяжести на направление туннеля. Если считать Землю однородным шаром, то, как было установлено ранее, сила тяжести в глубине направлена к центру Земли и пропорциональна расстоянию r от центра:

$$F(r) = mg\,\frac{r}{R}, \quad (17)$$

где mg — сила тяжести на поверхности Земли, R — ее радиус.

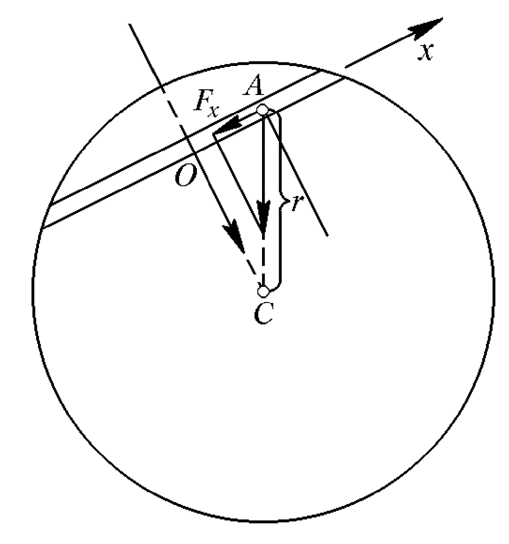


Рис. 174. Движение в туннеле, прорытом сквозь земной шар

Пусть туннель прорыт так, как показано на рис. 174. Очевидно, что в точке O, расположенной посередине туннеля, сила тяжести направлена «вниз», перпендикулярно туннелю. В произвольной точке A туннеля, отстоящей на расстояние x от его середины, сила тяжести $F(r)$ направлена под некоторым углом. Ее составляющую F_x вдоль туннеля можно найти, рассматривая подобные треугольники на рис. 174:

$$\frac{F_x}{F(r)} = \frac{x}{r},$$

где r — расстояние от точки A до центра Земли C. Отсюда $F_x = F(r)x/r$. Подставляя сюда $F(r)$ из (17), получаем

$$F_x = \frac{mgx}{R}. \quad (18)$$

Таким образом, сила F_x, определяющая движение поезда с выключенными двигателями в отсутствие трения, пропорциональна смещению x от положе-

ния равновесия O и направлена к этому положению равновесия. Это значит, что свободное движение поезда в туннеле имеет характер гармонического колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где k — коэффициент пропорциональности между смещением x и возвращающей силой F_x. Из (18) видно, что $k = mg/R$, поэтому

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \qquad (19)$$

Обратим внимание на то, что ответ не зависит от того, какие две точки земной поверхности соединяет этот прямой туннель, т. е. от того, на каком расстоянии от центра Земли он проходит. В частности, туннель может проходить через центр Земли. Время движения от одного конца до другого в любом таком туннеле одно и то же и составляет половину периода колебаний, определяемого формулой (19). Подчеркнем, что этот результат справедлив для модели однородного шара и к реальной Земле, строго говоря, неприменим.

Отметим, что период колебаний (19) равен периоду обращения спутника Земли по низкой круговой орбите, проходящей у самой поверхности Земли. Он составляет примерно 1,5 часа.

4. *Два положения равновесия.* Железный шарик подвешен на нити между полюсами электромагнита (рис. 175). В отсутствие тока в электромагните период колебаний маятника равен T_0. Когда через электромагнит пропускают

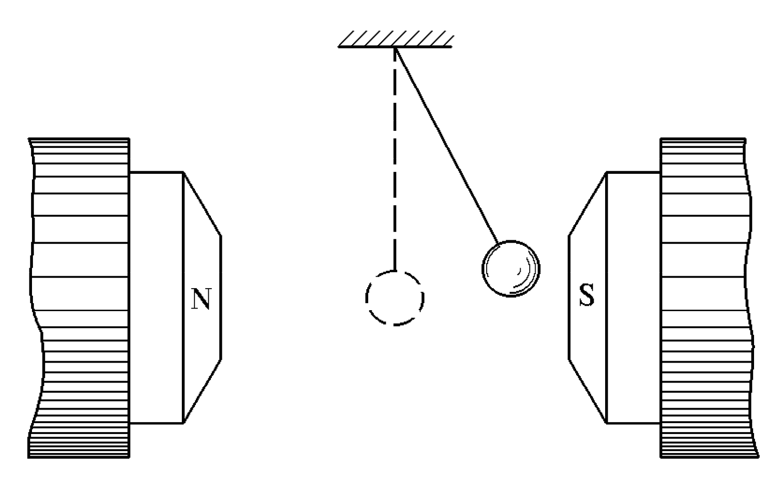


Рис. 175. Колебания железного щарика между полюсами магнита

ток и появляется горизонтальная магнитная сила, период колебаний становится равным T. На какой угол будет отклонена от вертикали нить после того, как эти колебания затухнут?

Решение. В отсутствие тока малые колебания шарика на нити происходят под действием силы тяжести и их частота ω_0 ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) определяется длиной нити l и ускорением свободного падения g:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}. \qquad (20)$$

При включении электромагнита под действием боковой силы положение равновесия смещается от вертикали на некоторый угол α. Именно

под этим углом и будет расположена нить после того, как колебания затухнут. При малых колебаниях около нового положения равновесия действующую на шарик горизонтальную магнитную силу можно считать постоянной. Шарик теперь совершает колебания в эффективном силовом поле, напряженность $\mathbf{g}_{эф}$ которого определяется векторной суммой силы тяжести и магнитной силы и направлена под углом α к вертикали (рис. 176).

Частота малых колебаний ω ($\omega = 2\pi/T$) около нового положения равновесия в этом эффективном силовом поле будет, очевидно, определяться выражением

$$\omega^2 = \frac{g_{эф}}{l}. \qquad (21)$$

Косинус угла α, определяющего новое положение равновесия, как видно из рис. 176, равен отношению g к $g_{эф}$:

$$\cos\alpha = \frac{g}{g_{эф}}.$$

Выражая g и $g_{эф}$ из (20) и (21), получаем

$$\cos\alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2. \qquad (22)$$

Из (22) видно, что решение существует, если период T новых колебаний меньше периода T_0 в отсутствие магнитного поля.

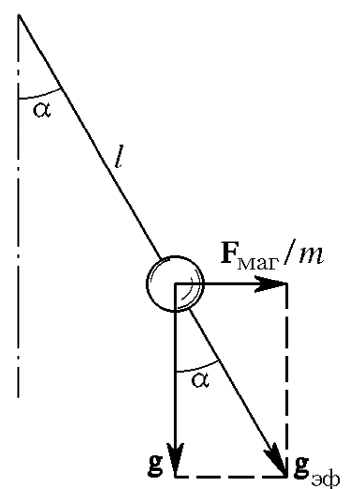


Рис. 176. Равновесие шарика в эффективном силовом поле с напряженностью $\mathbf{g}_{эфф}$

Сложные колебания. Можно ли быть уверенным в том, что, измеряя на опыте период колебаний после включения электромагнита, мы действительно обнаружим, что $T < T_0$? Оказывается, нет. Может случиться, что шарик будет совершать явно негармонические колебания, причем его движение будет весьма замысловатым. Попробуем разобраться, в чем здесь дело.

Прежде всего, обратим внимание на то, что при включении электромагнита появляется не одно, а два новых устойчивых положения равновесия, расположенных симметрично по обе стороны от старого положения равновесия в поле тяжести Земли. Само старое положение равновесия, когда маятник расположен отвесно посередине между полюсами электромагнита, также сохраняется, что ясно из соображений симметрии. Однако теперь это положение равновесия будет неустойчивым: если включить электромагнит, то висевший неподвижно маятник от ничтожного случайного толчка «свалится» или в одну, или в другую сторону.

Теперь ясно, что потенциальная энергия маятника как функция угла его отклонения от вертикали будет иметь вид, схематически показанный на рис. 177. Среднему неустойчивому положению соответствует локальный максимум потенциальной энергии, а углам отклонения $\pm\alpha$, определяемым соотношением (22), — симметрично расположенные минимумы. Характер колебаний маятника в такой сложной потенциальной яме зависит от полной энергии, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями.

Фазовая траектория. Если полная энергия E маятника меньше высоты потенциального барьера E_0, разделяющего положения устойчивого рав-

новесия, то маятник будет совершать колебания около одного из них. Таким колебаниям соответствуют замкнутые (в отсутствие трения) кривые 1 и $1'$ на фазовой диаграмме в нижней части рис. 177. Эти колебания будут гармоническими только при достаточно малых амплитудах, когда асимметричную потенциальную яму около бокового положения равновесия можно с хорошей точностью аппроксимировать параболой. Именно этим изохронным малым колебаниям и соответствует период T, входящий в выражение (22).

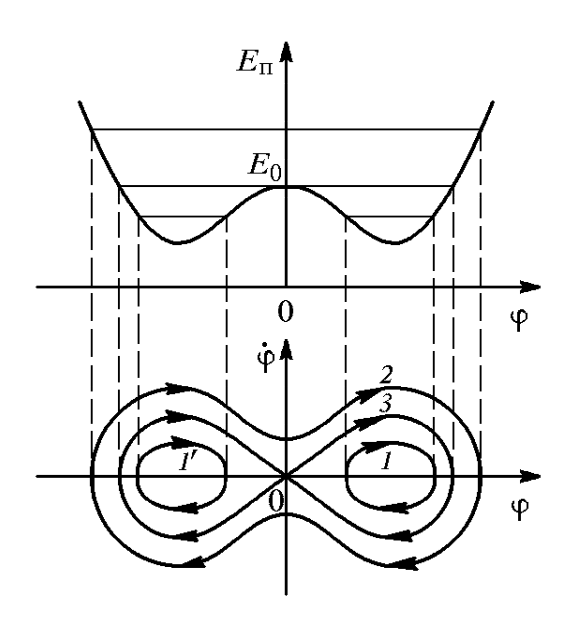


Рис. 177. Фазовый «портрет» маятника с двумя устойчивыми положениями равновесия

Если полная энергия маятника больше высоты потенциального барьера E_0, то колебаниям маятника будет соответствовать фазовая траектория 2 на рис. 177. Маятник проходит с некоторой скоростью через вертикальное положение, преодолевая потенциальный барьер, разгоняется по мере приближения к одному из боковых положений равновесия, проскакивает его, останавливается в крайней точке, движется обратно, разгоняясь, к положению равновесия, опять проскакивает его, замедляется, приближаясь к вертикальному положению, но не останавливается, а проскакивает его, и дальше все повторяется около другого положения равновесия.

Хотя и в этом случае движение маятника будет периодическим, но далеко не изохронным: период очень сильно зависит от значения полной энергии. В частности, когда энергия E равна высоте E_0 потенциального барьера, маятник медленно, «с трудом» взбирается на его вершину, практически «замирая» на ней. Такому движению маятника соответствует сепаратриса 3 на фазовой диаграмме, отделяющая траектории, соответствующие колебаниям около одного из положений равновесия, от траекторий, охватывающих оба положения равновесия. К таким колебаниям формула (22) не имеет никакого отношения.

Показанный на рис. 177 фазовый портрет соответствует полному пренебрежению трением и другими диссипативными процессами. С учетом трения при любых начальных условиях фазовая траектория будет постепенно закручиваться и в конце концов придет к одному из двух возможных состояний равновесия.

- Нарисуйте графики $x(t)$ и $v(t)$, описывающие колебания груза из задачи 1. Постройте соответствующую фазовую траекторию. Укажите на ней точку, изображающую начальное состояние осциллятора. Какой геометрический смысл на этой диаграмме имеют амплитуда A и начальная фаза α?
- Почему колебания груза, подвешенного на наклонных пружинах, будут гармоническими только при достаточно малых амплитудах? В каком смысле следует здесь понимать малость амплитуд?

- Поясните, почему сила, определяющая движение поезда в прорытом в Земле прямом туннеле, пропорциональна расстоянию от середины туннеля.
- Нарисуйте примерные графики колебаний маятника между полюсами электромагнита (задача 4) для разных энергий маятника.

§ 44. Вынужденные колебания. Резонанс

До сих пор мы рассматривали собственные колебания, т. е. колебания, происходящие в отсутствие внешних воздействий. Внешнее воздействие было нужно лишь для того, чтобы вывести систему из состояния равновесия, после чего она предоставлялась самой себе. Дифференциальное уравнение собственных колебаний вообще не содержит следов внешнего воздействия на систему: это воздействие отражается лишь в начальных условиях.

Установление колебаний. Но очень часто приходится сталкиваться с колебаниями, которые происходят при постоянно присутствующем внешнем воздействии. Особенно важен и в то же время достаточно прост для изучения случай, когда внешняя сила имеет периодический характер. Общей чертой вынужденных колебаний, происходящих под действием периодической внешней силы, является то, что спустя некоторое время после начала действия внешней силы система полностью «забывает» свое начальное состояние, колебания приобретают стационарный характер и не зависят от начальных условий. Начальные условия проявляются только в период установления колебаний, который обычно называют переходным процессом.

Синусоидальное воздействие. Рассмотрим вначале наиболее простой случай вынужденных колебаний осциллятора под действием внешней силы, изменяющейся по синусоидальному закону:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t. \qquad (1)$$

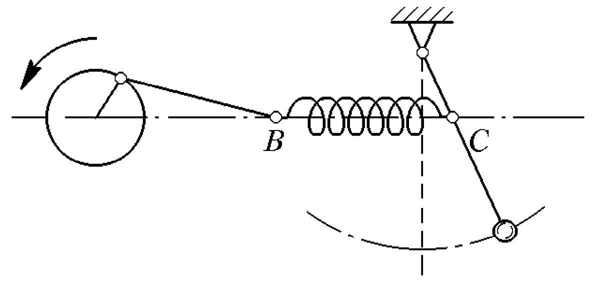


Рис. 178. Возбуждение вынужденных колебаний маятника

Такое внешнее воздействие на систему можно осуществить различными способами. Например, можно взять маятник в виде шарика на длинном стержне и длинную пружину с малой жесткостью и прикрепить ее к стержню маятника недалеко от точки подвеса, как показано на рис. 178. Другой конец горизонтально расположенной пружины следует заставить двигаться по закону $B \cos \omega t$ с помощью кривошипно-шатунного механизма, приводимого в движение электромотором. Действующая

на маятник со стороны пружины вынуждающая сила будет практически синусоидальна, если размах движения левого конца пружины B будет много больше амплитуды колебаний стержня маятника в точке закрепления пружины C.

Уравнение движения. Уравнение движения для этой и других подобных систем, в которых наряду с возвращающей силой и силой сопротивления на осциллятор действует вынуждающая внешняя сила, синусоидально изменяющаяся со временем, можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0 \cos \omega t. \tag{2}$$

Здесь левая часть в соответствии со вторым законом Ньютона, является произведением массы на ускорение. Первый член в правой части представляет собой возвращающую силу, пропорциональную смещению x из положения равновесия. Для подвешенного на пружине груза это упругая сила, а во всех других случаях, когда ее физическая природа иная, эту силу называют квазиупругой. Второе слагаемое есть сила трения, пропорциональная скорости, например сила сопротивления воздуха или сила трения в оси. Амплитуду F_0 и частоту ω раскачивающей систему вынуждающей силы будем считать постоянными.

Разделим обе части уравнения (2) на массу m и введем обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{\beta}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}. \tag{3}$$

Теперь уравнение (2) принимает вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \tag{4}$$

В отсутствие вынуждающей силы правая часть уравнения (4) обращается в нуль и оно, как и следовало ожидать, сводится к уравнению собственных затухающих колебаний.

Опыт показывает, что во всех системах под действием синусоидальной внешней силы в конце концов устанавливаются колебания, которые также происходят по синусоидальному закону с частотой вынуждающей силы ω и с постоянной амплитудой a, но с некоторым сдвигом по фазе относительно вынуждающей силы. Такие колебания называются *установившимися* вынужденными колебаниями.

Установившиеся колебания. Рассмотрим вначале именно установившиеся вынужденные колебания, причем для простоты пренебрежем трением. В этом случае в уравнении (4) не будет члена, содержащего скорость:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \tag{5}$$

Попробуем искать решение $x(t)$, соответствующее установившимся вынужденным колебаниям, в виде

$$x(t) = a\cos\omega t. \quad (6)$$

Вычислим вторую производную $\ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t$ и подставим ее вместе с $x(t)$ в уравнение (5):

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)a\cos\omega t = f_0\cos\omega t. \quad (7)$$

Чтобы это равенство было справедливо в любой момент времени, коэффициенты при $\cos\omega t$ слева и справа должны быть одинаковы. Из этого условия находим амплитуду колебаний a:

$$a = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

Исследуем зависимость амплитуды a от частоты ω вынуждающей силы. График этой зависимости показан на рис. 179. При $\omega = 0$ формула (8) дает $a = f_0/\omega_0^2$. Подставив сюда значения $f_0 = F_0/m$ и $\omega_0^2 = k/m$, видим, что постоянная во времени сила F_0 просто смещает осциллятор в новое положение равновесия, сдвинутое от старого на F_0/k. Из (6) следует, что при $\omega = 0$ смещение

$$x(t) = \frac{F_0}{k} = \text{const},$$

как, очевидно, и должно быть.

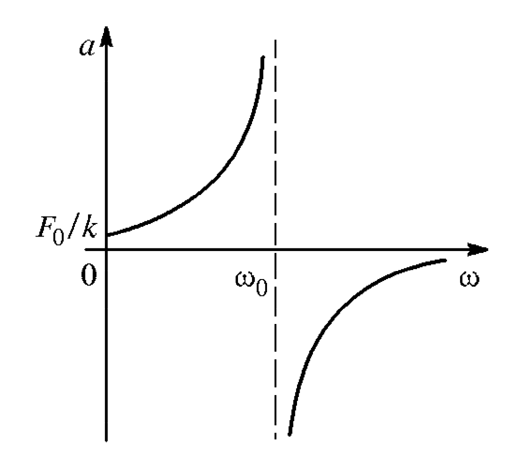


Рис. 179. График зависимости $a(\omega)$

Фазовые соотношения. По мере роста частоты ω вынуждающей силы от 0 до ω_0 установившиеся колебания $x(t)$ происходят в фазе с вынуждающей силой $f_0\cos\omega t$, а их амплитуда постоянно увеличивается, сначала медленно, а по мере приближения ω к ω_0 — все быстрее и быстрее: при $\omega \to \omega_0$ амплитуда колебаний неограниченно возрастает ($a \to \infty$).

При значениях ω, превосходящих частоту собственных колебаний ω_0, формула (8) дает для a отрицательное значение (рис. 179). Из формулы (6) ясно, что при $\omega > \omega_0$ колебания происходят в противофазе с вынуждающей силой: когда сила действует в одну сторону, осциллятор смещен в противоположную. При неограниченном увеличении частоты вынуждающей силы амплитуда колебаний стремится к нулю.

Амплитуду колебаний во всех случаях удобно считать положительной, чего легко добиться, вводя сдвиг фаз между вынуждающей

силой и смещением:

$$x(t) = |a| \cos(\omega t + \vartheta). \tag{9}$$

Здесь a по-прежнему дается формулой (8), а сдвиг фазы ϑ равен нулю при $\omega < \omega_0$ и равен $-\pi$ при $\omega > \omega_0$. Графики зависимости $|a|$ и ϑ от частоты вынуждающей силы показаны на рис. 180.

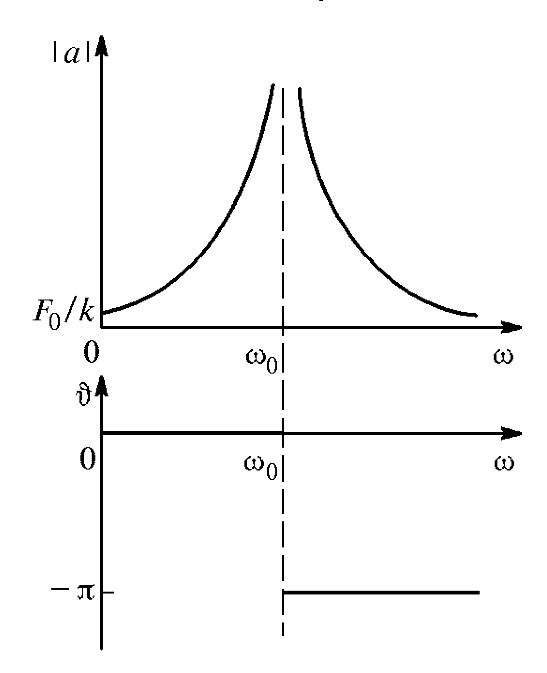


Рис. 180. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний

Резонанс. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы имеет немонотонный характер. Резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты ω вынуждающей силы к собственной частоте ω_0 осциллятора называется *резонансом*.

Формула (8) дает выражение для амплитуды вынужденных колебаний в пренебрежении трением. Именно с этим пренебрежением связано обращение амплитуды колебаний в бесконечность при точном совпадении частот ω и ω_0. Реально амплитуда колебаний в бесконечность, конечно же, обращаться не может.

Это означает, что при описании вынужденных колебаний вблизи резонанса учет трения принципиально необходим. При учете трения амплитуда вынужденных колебаний при резонансе получается конечной. Она будет тем меньше, чем больше трение в системе. Вдали от резонанса формулой (8) можно пользоваться для нахождения амплитуды колебаний и при наличии трения, если оно не слишком сильное, т. е. $\gamma \ll \omega_0$. Более того, эта формула, полученная без учета трения, имеет физический смысл только тогда, когда трение все же есть. Дело в том, что само понятие установившихся вынужденных колебаний применимо только к системам, в которых есть трение.

Если бы трения совсем не было, то процесс установления колебаний продолжался бы бесконечно долго. Реально это означает, что полученное без учета трения выражение (8) для амплитуды вынужденных колебаний будет правильно описывать колебания в системе только спустя достаточно большой промежуток времени после начала действия вынуждающей силы. Слова «достаточно большой промежуток времени» означают здесь, что уже закончился переходный процесс, длительность которого совпадает с характерным временем $T = 1/\gamma$ затухания собственных колебаний в системе.

При малом трении установившиеся вынужденные колебания происходят в фазе с вынуждающей силой при $\omega < \omega_0$ и в противофазе при $\omega > \omega_0$, как и в отсутствие трения. Однако вблизи резонанса фаза меняется не скачком, а непрерывно, причем при точном совпадении частот ($\omega = \omega_0$) смещение $x(t)$ отстает по фазе от вынуждающей силы на $\pi/2$ (на четверть периода). Скорость $\dot{x}(t)$ изменяется при этом в фазе с вынуждающей силой, что обеспечивает наиболее благоприятные условия для передачи энергии от источника внешней вынуждающей силы к осциллятору.

- Какой физический смысл имеет каждый из членов в уравнении (4), описывающем вынужденные колебания осциллятора?
- Что такое установившиеся вынужденные колебания?
- При каких условиях можно использовать формулу (8) для амплитуды установившихся вынужденных колебаний, полученную без учета трения?
- Что такое резонанс? Приведите известные вам примеры проявления и использования явления резонанса.
- Опишите сдвиг по фазе между вынуждающей силой и смещением при разных соотношениях между частотой ω в вынуждающей силы и собственной частотой ω_0 осциллятора.
- Чем определяется длительность процесса установления вынужденных колебаний? Дайте обоснование ответа.

△ **Векторные диаграммы.** Убедиться в справедливости приведенных выше утверждений можно, если получить решение уравнения (4), описывающее установившиеся вынужденные колебания при наличии трения. Поскольку установившиеся колебания происходят с частотой вынуждающей силы ω и некоторым сдвигом по фазе ϑ, то решение уравнения (4), соответствующее таким колебаниям, следует искать в виде

$$x(t) = a\cos(\omega t + \vartheta). \tag{10}$$

При этом скорость и ускорение, очевидно, тоже будут изменяться со временем по гармоническому закону:

$$\dot{x}(t) = -a\omega\sin(\omega t + \vartheta), \tag{11}$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos(\omega t + \vartheta). \tag{12}$$

Амплитуду a установившихся вынужденных колебаний и сдвиг фазы ϑ удобно определять с помощью векторных диаграмм. Воспользуемся тем обстоятельством, что мгновенное значение любой изменяющейся по гармоническому закону величины можно представить как проекцию вектора на некоторое заранее выбранное направление, причем сам вектор равномерно вращается в плоскости с частотой ω, а его неизменная длина равна ампли-

тудному значению этой осциллирующей величины. В соответствии с этим сопоставим каждому члену уравнения (4) вращающийся с угловой скоростью вектор, длина которого равна амплитудному значению этого члена.

Поскольку проекция суммы нескольких векторов равна сумме проекций этих векторов, то уравнение (4) означает, что сумма векторов, сопоставляемых членам, стоящим в левой части, равна вектору, сопоставляемому величине $f \cos \omega t$, стоящей в правой части. Чтобы построить эти векторы, выпишем мгновенные значения всех членов левой части уравнения (4), учитывая соотношения (10)–(12):

$$\omega_0^2 x = -\omega_0^2 a \cos (\omega t + \vartheta),$$

$$2\gamma \dot{x} = -2\gamma\omega a \sin (\omega t + \vartheta) = 2\gamma\omega a \cos (\omega t + \vartheta + \pi/2), \qquad (13)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos (\omega t + \vartheta) = \omega^2 a \cos (\omega t + \vartheta + \pi).$$

Из формул (13) видно, что вектор длины $2\gamma\omega a$, сопоставляемый величине $2\gamma\dot{x}$, опережает на угол $\pi/2$ вектор $\omega_0^2 a$, сопоставляемый величине $\omega_0^2 x$. Вектор длины $\omega^2 a$, сопоставляемый члену $\ddot{x}$, опережает на π вектор длины $\omega_0^2 a$, т. е. эти векторы направлены в противоположные стороны.

Взаимное расположение этих векторов для произвольного момента времени показано на рис. 181. Вся система векторов вращается как целое с угловой скоростью ω против часовой стрелки вокруг точки O. Мгновенные значения всех величин

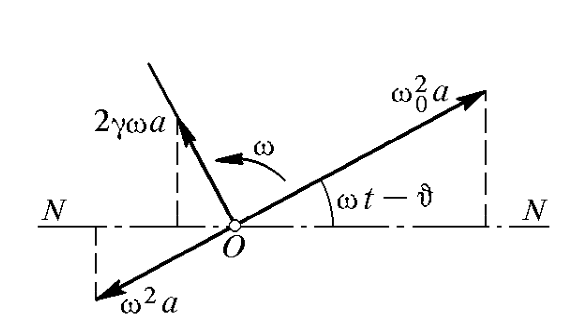


Рис. 181. Векторная диаграмма вынужденных колебаний

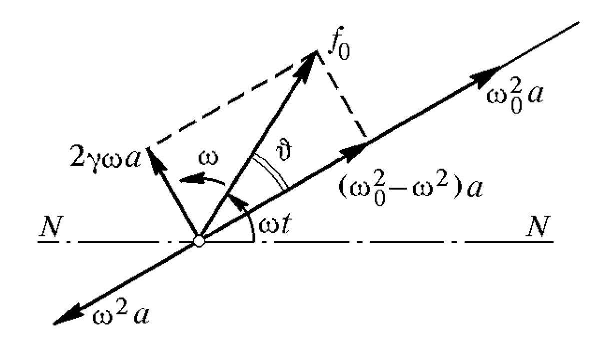


Рис. 182. Вектор f_0, сопоставляемый внешней силе

получаются проецированием соответствующих векторов на заранее выбранное направление NN. Вектор, сопоставляемый правой части уравнения (4), равен сумме векторов, изображенных на рис. 181. Это сложение показано на рис. 182. Применяя теорему Пифагора, получаем

$$f_0^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\gamma^2\omega^2 a^2,$$

откуда находим амплитуду установившихся вынужденных колебаний a:

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \tag{14}$$

Сдвиг фазы ϑ между вынуждающей силой $f(t)$ и смещением $x(t)$, как видно из векторной диаграммы на рис. 182, отрицателен, так как вектор длины $\omega_0^2 a$ отстает от вектора f_0. Поэтому

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{15}$$

Итак, установившиеся вынужденные колебания происходят по гармоническому закону (10), где a и ϑ определяются формулами (14) и (15).

Резонансные кривые. Амплитуда установившихся вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы f. Исследуем зависимость амплитуды колебаний от частоты ω вынуждающей силы. При малом затухании γ эта зависимость имеет очень резкий характер. Если $\gamma = 0$, то при стремлении ω к частоте свободных колебаний ω_0 амплитуда вынужденных колебаний a стремится к бесконечности, что совпадает с полученным ранее результатом (8). При наличии затухания амплитуда колебаний в резонансе уже не обращается в бесконечность, хотя и значительно превышает амплитуду колебаний под действием внешней силы той же величины, но имеющей частоту, далекую от резонансной. Резонансные кривые при разных значениях постоянной затухания γ приведены на рис. 183. Для нахождения частоты резонанса $\omega_{\text{рез}}$, нужно найти, при каком ω подкоренное выражение в формуле (14) имеет минимум. Приравнивая производную этого выражения по ω нулю (или дополняя его до полного квадрата), убеждаемся, что максимум амплитуды вынужденных колебаний имеет место при

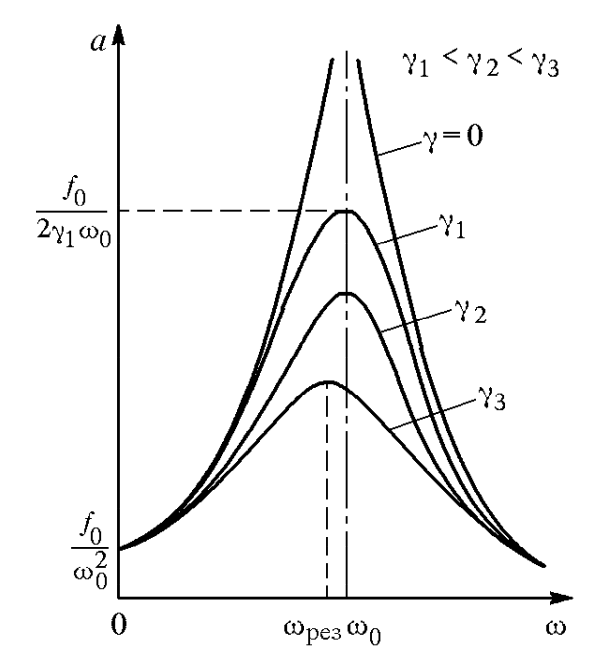


Рис. 183. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \tag{16}$$

Резонансная частота оказывается меньше частоты свободных колебаний системы. При малых γ резонансная частота практически совпадает с ω_0. При стремлении частоты вынуждающей силы к бесконечности, т. е. при $\omega \gg \omega_0$, амплитуда a, как видно из (14), стремится к нулю. При $\omega = 0$, т. е. при действии постоянной внешней силы, амплитуда $a = f_0/\omega_0^2$. Если подставить сюда $f_0 = F_0/m$ и $\omega_0^2 = k/m$, получим $a_{\text{ст}} = F_0/k$. Это есть статическое смещение осциллятора из положения равновесия под действием постоянной силы F_0.

Максимальная амплитуда. Амплитуду вынужденных колебаний в резонансе $a_{\text{рез}}$ находим, подставляя частоту $\omega_{\text{рез}}$ из (16) в выражение (14):

$$a = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}} \approx \frac{f_0}{2\gamma\omega_0}. \qquad (17)$$

Амплитуда колебаний в резонансе тем больше, чем меньше постоянная затухания γ. При изучении вынужденных колебаний вблизи резонанса трением пренебрегать нельзя, как бы мало оно ни было: только при учете затухания амплитуда в резонансе $a_{\text{рез}}$ получается конечной.

Интересно сравнить значение $a_{\text{рез}}$ со статическим смещением $a_{\text{ст}}$ под действием силы F_0. Составляя отношение $a_{\text{рез}}/a_{\text{ст}}$, получаем при малом затухании

$$\frac{a_{\text{рез}}}{a_{\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \qquad (18)$$

Подставляя сюда $\omega_0 = 2\pi/T$ и учитывая, что $1/\gamma = \tau$ есть время жизни собственных затухающих колебаний для той же системы в отсутствие внешних сил, находим

$$\frac{a_{\text{рез}}}{a_{\text{ст}}} = \pi\frac{\tau}{T}.$$

Но τ/T есть число колебаний, совершаемых затухающим осциллятором за время жизни колебаний τ. Таким образом, резонансные свойства системы характеризуются тем же параметром, что и собственные затухающие колебания.

Фазовые соотношения. Формула (15) дает возможность проанализировать изменение сдвига фазы ϑ между внешней силой и смещением $x(t)$ при вынужденных колебаниях. При $\omega \ll \omega_0$ значение $\operatorname{tg}\vartheta$ близко к нулю. Это означает, что при низких частотах смещение осциллятора происходит в фазе с внешней силой. При медленном вращении кривошипа на рис. 178 маятник движется в такт с правым концом шатуна.

Если $\omega \gg \omega_0$, то $\operatorname{tg} \vartheta$ стремится к нулю со стороны отрицательных значений, т. е. сдвиг фазы равен $-\pi$, и смещение осциллятора происходит в противофазе с вынуждающей силой. В резонансе, как видно из (15), смещение отстает по фазе от внешней силы на $\pi/2$. Вторая из формул (13) показывает, что при этом внешняя сила изменяется в фазе со скоростью $\dot{x}(t)$, т. е. все время действует в направлении движения. Что именно так и должно быть, ясно из интуитивных соображений.

Резонанс скорости. Из формулы (13) видно, что амплитуда колебаний скорости при установившихся вынужденных колебаниях равна ωa. С помощью (14) получаем

$$\omega a = \frac{f_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\gamma^2}}. \qquad (19)$$

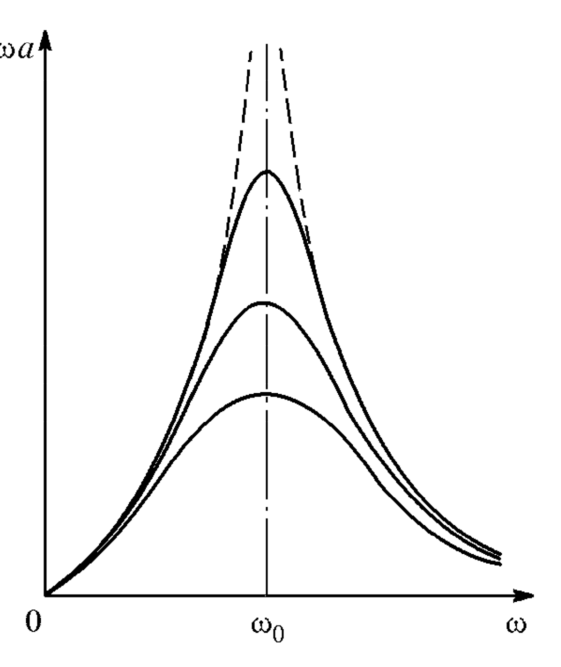


Рис. 184. Амплитуда скорости при установившихся вынужденных колебаниях

Зависимость амплитуды скорости от частоты внешней силы показана на рис. 184. Резонансная кривая для скорости хотя и похожа на резонансную кривую для смещения, но отличается от нее в некоторых отношениях. Так, при $\omega = 0$, т. е. при действии постоянной силы, осциллятор испытывает статическое смещение из положения равновесия и скорость его после того, как закончится переходный процесс, равна нулю. Из формулы (19) видно, что амплитуда скорости при $\omega = 0$ обращается в нуль. Резонанс скорости имеет место при точном совпадении частоты внешней силы с частотой свободных колебаний $\omega = 0$.

- Как строятся векторные диаграммы для установившихся вынужденных колебаний при синусоидальном внешнем воздействии?
- Чем определяется частота, амплитуда и фаза установившихся вынужденных гармонических колебаний?
- Опишите различия резонансных кривых для амплитуды смещения и амплитуды скорости. Какими характеристиками колебательной системы определяется острота резонансных кривых?
- Как связан характер резонансной кривой с параметрами системы, определяющими затухание ее собственных колебаний? ▲

§ 45. Энергетические превращения при вынужденных колебаниях. Установление колебаний

Установившиеся вынужденные колебания под действием синусоидальной силы внешне очень похожи на собственные незатухающие колебания: они происходят по синусоидальному закону с неизменной амплитудой. Но, несмотря на внешнее сходство, это принципиально разные колебания. При свободных колебаниях энергия колебаний, т. е. сумма кинетической и потенциальной энергий, постоянна, а средние значения кинетической и потенциальной энергий равны между собой. А как обстоит дело в случае синусоидальных вынужденных колебаний?

Энергия установившихся колебаний. Запишем выражение для энергии колебаний:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \sin^2 (\omega t + \vartheta) + \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega t + \vartheta). \quad (1)$$

Входящая в это выражение частота ω определяется внешним воздействием и не зависит от характеризующих осциллятор величин k и m. Поэтому в отличие от случая свободных колебаний, где $\omega_0^2 = k/m$ и множители перед $\sin^2 (\omega t + \alpha)$ и $\cos^2 (\omega t + \alpha)$ в формуле (13) § 41 оказались одинаковыми, в формуле (1) это не так. Таким образом, полная энергия при установившихся вынужденных колебаниях непостоянна.

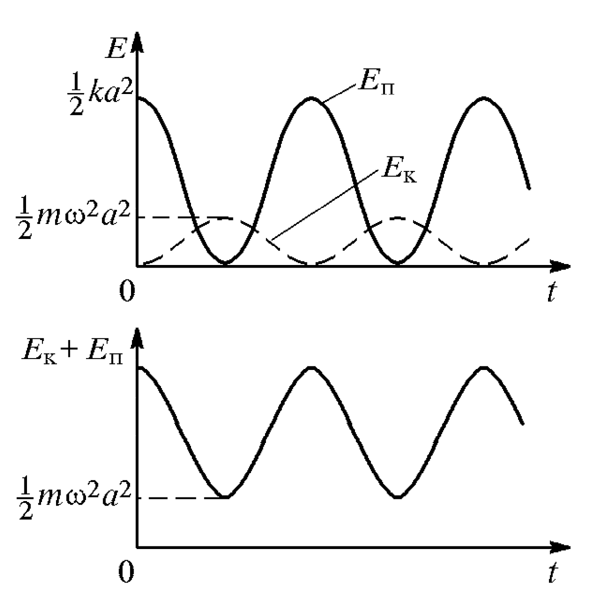


Рис. 185. Зависимость от времени кинетической, потенциальной и полной энергий осциллятора для установившихся вынужденных колебаний (при $\omega \ll \omega_0$)

На рис. 185 показана зависимость от времени кинетической, потенциальной и полной энергий осциллятора при установившихся вынужденных колебаниях в случае $\omega \ll \omega_0$. Все время идет переход энергии от источника внешнего воздействия в рассматриваемую систему и обратно. Полная энергия постоянна только при $\omega = \omega_0$, т. е. при резонансе.

Средние значения кинетической и потенциальной энергий при вынужденных колебаниях могут сильно отличаться друг от друга. При низких частотах, когда $\omega < \omega_0$, среднее значение кинетической энергии меньше среднего значения потенциальной; при $\omega > \omega_0$ — наоборот. Действитель-

но, при вынужденных колебаниях с очень низкими частотами почти вся энергия осциллятора — это энергия деформированной пружины, а кинетическая энергия ничтожно мала. При высоких частотах, напротив, скорость может достигать огромных значений даже при ничтожных смещениях, когда потенциальная энергия пренебрежимо мала.

Энергетические превращения. Рассмотрим подробнее энергетические превращения при установившихся вынужденных колебаниях. Если частота внешней силы много меньше частоты собственных колебаний системы, то, как уже отмечалось, почти вся энергия колебаний представляет собой потенциальную энергию. Поэтому, когда осциллятор удаляется от положения равновесия, энергия системы возрастает, т. е. внешняя сила совершает положительную работу. На протяжении этой четверти периода энергия поступает в систему от внешнего источника. На протяжении следующей четверти периода, когда осциллятор возвращается в положение равновесия и потенциальная энергия убывает, система отдает энергию внешнему источнику. Затем все повторяется.

Если частота внешней силы много больше частоты собственных колебаний, то, как мы видели, энергия осциллятора — это в основном кинетическая энергия. Поэтому система получает энергию от внешнего источника в те четверти периода, когда осциллятор движется к положению равновесия и его скорость возрастает. При удалении от положения равновесия система отдает энергию внешнему источнику.

Ясно, что при установившихся колебаниях получаемая системой от внешнего источника за период энергия превосходит отдаваемую, так как в системе действует сила трения, работа которой определяет диссипацию механической энергии — переход части энергии колебаний в теплоту.

При резонансе, когда частота внешней силы совпадает с частотой свободных колебаний, полная энергия системы постоянна, как и в случае свободных колебаний. Дважды за период кинетическая и потенциальная энергии целиком переходят друг в друга. Другими словами, при резонансе система совершает «почти собственные» колебания. Роль внешней силы сводится только к компенсации действующей в системе силы трения.

Поглощаемая мощность. Запишем выражение для развиваемой внешней силой мощности $P(t)$ при установившихся колебаниях:

$$P(t) = F(t)v_x(t) = F(t)\dot{x}(t). \qquad (2)$$

При заданной внешней силе эта мощность пропорциональна первой степени скорости осциллятора, а тем самым и первой степени амплитуды вынужденных колебаний.

Скорость диссипации механической энергии в системе определяется мощностью, развиваемой силой трения:

$$P_{\text{тр}}(t) = F_{\text{тр}} v_x(t) = -\beta v_x^2(t) = -\beta \dot{x}^2(t). \qquad (3)$$

Видно, что эта мощность пропорциональна квадрату скорости осциллятора, т. е. пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Устойчивость вынужденных колебаний. Линейная зависимость мощности внешней силы и квадратичная зависимость мощности силы трения от амплитуды колебаний позволяют объяснить устойчивость режима вынужденных колебаний. Изобразим эту зависимость графически. На рис. 186 прямая линия характеризует получаемую системой энергию, а парабола — диссипируемую энергию, определяемую мощностью силы трения. Поскольку в установившемся режиме эти энергии равны, то точка пересечения прямой и параболы соответствует амплитуде установившихся колебаний. Представим себе, что в силу каких-то случайных причин амплитуда колебаний немного изменилась, например уменьшилась при неизменной фазе. Тогда, как видно из рис. 186, мощность внешней силы будет больше диссипируемой мощности. Это приводит к росту энергии системы и восстановлению прежнего значения амплитуды колебаний.

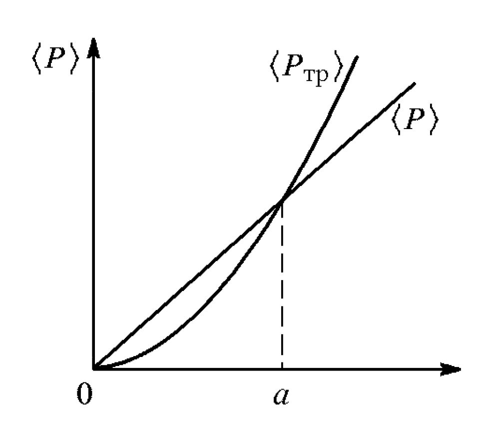


Рис. 186. К исследованию устойчивости режима вынужденных колебаний

Аналогично можно убедиться в том, что амплитуда вынужденных колебаний устойчива и по отношению к случайным отклонениям в сторону возрастания.

- Чем отличаются вынужденные гармонические колебания от собственных с точки зрения происходящих энергетических превращений?
- В чем особенность энергетических превращений при резонансе?
- Что будет, если в режиме установившихся вынужденных колебаний произойдет случайное увеличение или уменьшение их амплитуды?

△ **Переходные процессы.** До сих пор мы рассматривали установившийся режим вынужденных колебаний. А как происходит установление колебаний? Начнем со случая резонансной внешней силы. Пусть в начальный момент осциллятор покоится в положении равновесия, т. е. начальные условия имеют вид

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \qquad (4)$$

В этот момент на него начинает действовать внешняя синусоидальная сила с частотой ω, равной частоте ω_0 свободных колебаний осциллятора.

Как мы знаем, движение осциллятора будет описываться уравнением (4) предыдущего параграфа:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_0 t. \qquad (5)$$

Нам известно решение этого уравнения, описывающее установившиеся колебания, которые не зависят от начальных условий. При резонансе колебания отстают от вынуждающей силы на четверть периода, поэтому

$$x(t) = a \cos (\omega_0 t - \pi/2) = a \sin \omega_0 t. \qquad (6)$$

Однако это решение не удовлетворяет начальным условиям (4), так как согласно (6) скорость $\dot{x}$ при $t = 0$ не равна нулю.

Как же найти решение уравнения (5), удовлетворяющее нашим начальным условиям? Такое решение обязательно должно переходить в (6) по мере установления колебаний, т. е при $t \to \infty$. Поэтому попробуем искать решение в виде суммы выражения (6) и функции $A \exp(-\gamma t) \cos (\omega_0 t + \alpha)$, описывающей собственные затухающие колебания осциллятора, т. е. являющейся решением уравнения (5) с правой частью, равной нулю, в случае малого затухания $\gamma \ll \omega_0$. Эта сумма

$$x(t) = a \sin \omega_0 t + A \exp(-\gamma t) \cos (\omega_0 t + \alpha) \qquad (7)$$

действительно является решением уравнения (5), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. В самом деле, уравнение (5) содержит функцию $x(t)$ и ее производные только в первой степени, поэтому каждое слагаемое в выражении (7) можно подставлять в уравнение (5) по отдельности. Подстановка слагаемого $a \sin \omega_0 t$ в левую часть (5) дает $f_0 \cos \omega_0 t$, а подстановка второго слагаемого дает нуль.

Благодаря множителю $\exp(-\gamma t)$ второе слагаемое в (7) стремится к нулю при $t \to \infty$, и остается только член $a \sin \omega_0 t$, описывающий установившиеся вынужденные колебания. Но при малых значениях времени t второе слагаемое в (7) играет важную роль: наличие двух произвольных постоянных A и α позволяет удовлетворить любым начальным условиям. Полагая в (7) $t = 0$ и учитывая первое из начальных условий (4), получаем

$$0 = A \cos \alpha,$$

откуда $\alpha = \pi/2$ и $\cos (\omega_0 t + \alpha)$ в (7) равен $-\sin \omega_0 t$.

При нахождении скорости $\dot{x}$ из (7) учтем, что при малом затухании, когда $\gamma \ll \omega_0$, сомножитель $\exp(-\gamma t)$ почти не изменя-

ется на протяжении периода колебаний. Поэтому при дифференцировании $x(t)$ его можно считать постоянным:

$$\dot{x}(t) = a\omega_0 \cos \omega_0 t - A \exp(-\gamma t)\, \omega_0 \cos \omega_0 t. \qquad (8)$$

Полагая здесь $t = 0$ и учитывая второе начальное условие (4), получаем

$$0 = a\omega_0 - A\omega_0,$$

откуда $A = a$. Теперь выражение (7) принимает вид

$$x(t) = a \sin \omega_0 t - a \exp(-\gamma t) \sin \omega_0 t = \\ = [1 - \exp(-\gamma t)] \sin \omega_0 t. \qquad (9)$$

Время установления колебаний. Первое слагаемое в (9) представляет собой гармоническое колебание постоянной амплитуды и соответствует установившимся вынужденным колебаниям. Второе слагаемое соответствует собственным затухающим колебаниям. Поэтому процесс установления колебаний можно представить

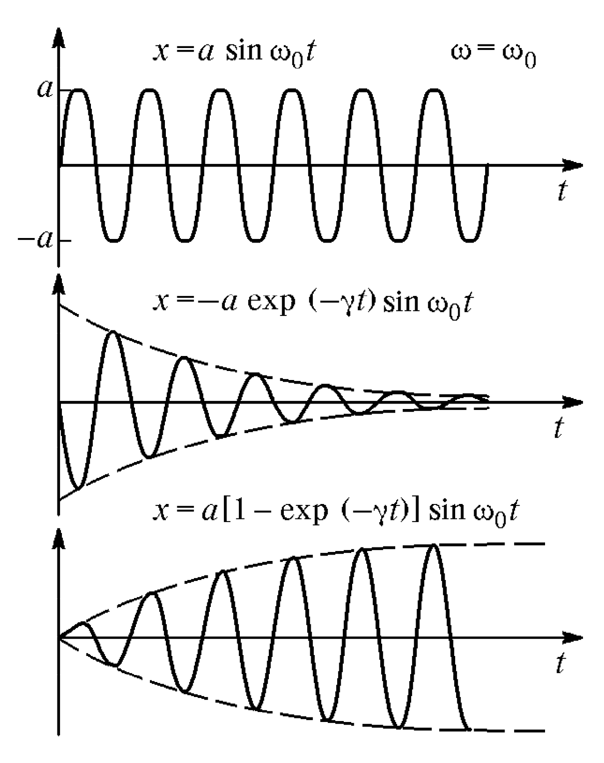


Рис. 187. Процесс установления вынужденных колебаний при резонансе

себе таким образом: в начале процесса в системе одновременно присутствуют и вынужденные, и собственные колебания, причем амплитуда и фаза последних таковы, что результирующее колебание удовлетворяет начальным условиям. Графики этих колебаний показаны на рис. 187.

При малом затухании результирующее колебание $x(t)$ в (9) можно рассматривать как синусоидальное колебание с частотой ω_0, амплитуда которого медленно нарастает со временем

(рис. 187). Характерное время установления амплитуды колебаний $\tau = 1/\gamma$ совпадает с временем жизни собственных затухающих колебаний в той же системе.

Подведем некоторые итоги. При очень малом затухании амплитуда в резонансе будет очень большой, но ее установление длится очень долго. Чем более резко выражен резонанс, тем медленнее происходит установление. Это легко понять и с помощью энергетических соображений: чем острее резонанс, тем

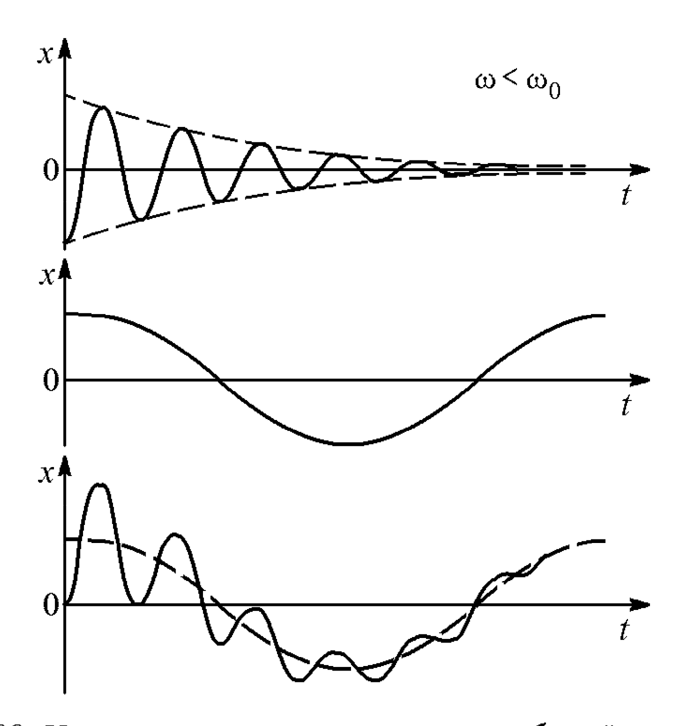


Рис. 188. Установление вынужденных колебаний при $\omega < \omega_0$

больше запасаемая системой энергия и, следовательно, тем больше времени требуется для того, чтобы сообщить системе эту энергию.

Если частота вынуждающей силы ω не совпадает с частотой свободных колебаний ω_0, то процесс установления колебаний также можно представить как наложение вынужденных колебаний с частотой ω и затухающих собственных колебаний с частотой ω_0. Картина установления колебаний при $\omega < \omega_0$ показана на рис. 188.

Несинусоидальное периодическое воздействие. Вынужденные колебания осциллятора возможны при любом периодическом внешнем воздействии, а не только синусоидальном. При этом установившиеся колебания, вообще говоря, не будут синусоидальными, но они будут представлять собой периодическое движение с периодом, равным периоду внешнего воздействия. Внешнее воздействие $F(t)$ может представлять собой, например, последовательность периодически повторяющихся толчков (рис. 189). Если период внешних толчков совпадает с периодом

собственных колебаний, то в системе наступает резонанс. Колебания при этом будут почти синусоидальными. Сообщаемая системе при каждом толчке энергия при резонансе мала по сравнению с запасом энергии системы и равна диссипируемой за период энергии.

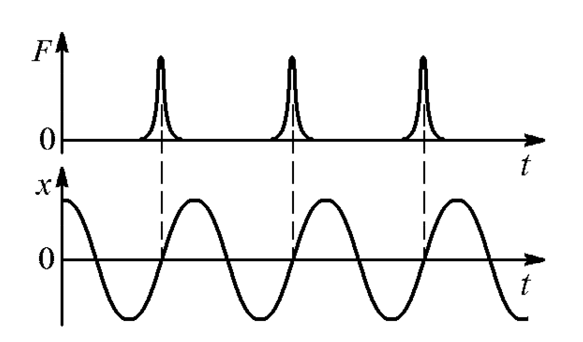


Рис. 189. Вынужденные колебания осциллятора под действием коротких толчков

На рис. 190 показана фазовая диаграмма вынужденных колебаний осциллятора, происходящих под действием коротких толчков. При каждом толчке осциллятор изменяет свою скорость на одну и ту же величину Δv. Период чередования толчков равен периоду собственных колебаний осциллятора, т. е. имеет место резонанс. Движение осциллятора установится таким образом, что толчки будут приходиться на те моменты времени, когда осциллятор проходит положение равновесия. Резонанс будет иметь место и в том

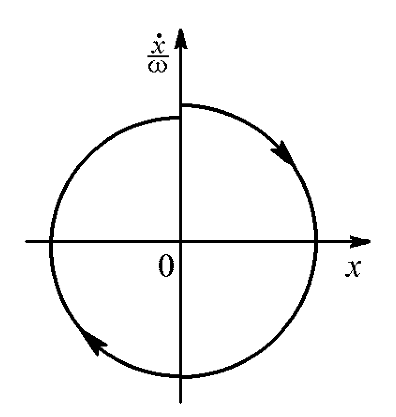


Рис. 190. Фазовая диаграмма колебаний под действием коротких толчков

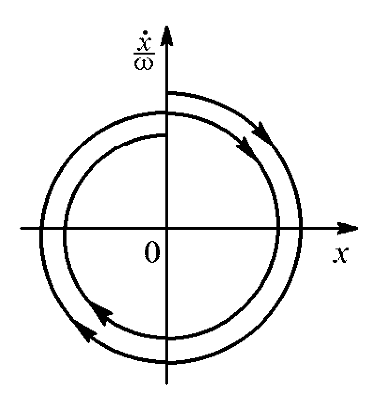


Рис. 191. Вынужденные колебания под действием толчков, период которых вдвое превосходит собственный период осциллятора

случае, когда период чередования толчков будет кратен периоду собственных колебаний. Такое невозможно при синусоидальном внешнем воздействии. На рис. 191 показана фазовая диаграмма для случая, когда период толчков вдвое превышает период осциллятора.

Наиболее интересными, хотя и очень сложными для исследования являются системы, в которых колебания возникают не за счет начального толчка и не за счет периодического внешнего воздействия, а в результате имеющейся у каждой из таких систем способности самой регулировать поступление энергии от постоянного источника. Такие системы носят название *автоко-*

лебательных. Наиболее известный пример автоколебательной системы — обычный часовой механизм.

- Чем определяется длительность процесса установления вынужденных колебаний при резонансном внешнем воздействии? Ответ поясните с помощью энергетических соображений.
- Как происходит установление вынужденных колебаний при $\omega < \omega_0$ и $\omega > \omega_0$? Проиллюстрируйте ответ примерными графиками.
- Как выглядит фазовая диаграмма колебаний осциллятора, возбуждаемых короткими периодическими толчками? ▲

§ 46. Волны

С давних пор наглядный образ волны всегда ассоциировался с волнами на поверхности воды. Но волны на воде представляют собой значительно более сложное явление, чем многие другие волновые процессы — такие, как распространение звука в однородной изотропной среде. Поэтому естественно начинать изучение волнового движения не с волн на воде, а с более простых случаев.

Волны в дискретной цепочке. Проще всего представить себе волну, распространяющуюся по бесконечной цепочке связанных маятников (рис. 192). С бесконечной цепочки мы начинаем для того, чтобы можно было рассматривать волну, распространяющуюся в одном направлении, и не думать о возможном ее отражении от конца

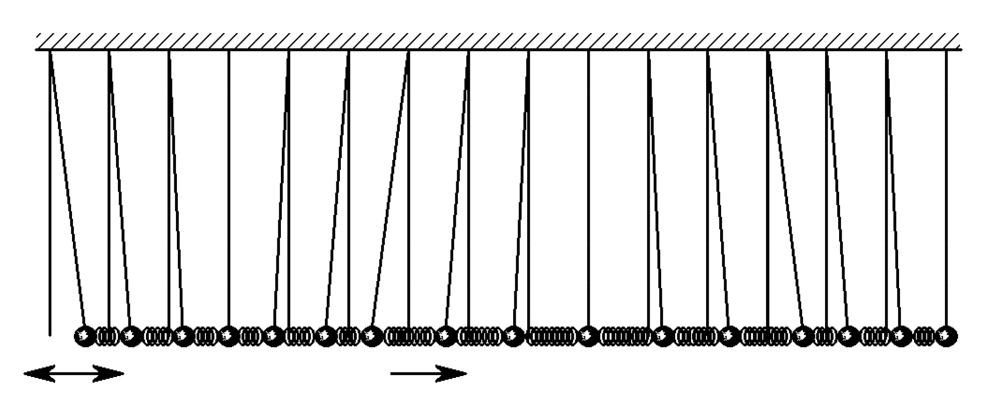


Рис. 192. Волна в цепочке связанных маятников

цепочки. Если маятник, находящийся в начале цепочки, привести в гармоническое колебательное движение с некоторой частотой ω и амплитудой A, то колебательное движение будет распространяться по цепочке. Такое распространение колебаний из одного места в другое и называется *волновым процессом* или *волной*.

В отсутствие затухания любой другой маятник в цепочке будет повторять вынужденные колебания первого маятника с некоторым отставанием по фазе. Это запаздывание связано с тем, что распро-

странение колебаний по цепочке происходит с некоторой конечной скоростью. *Скорость* распространения колебаний u зависит от жесткости соединяющей маятники пружинки, т. е, от того, насколько сильна связь между маятниками. Если первый маятник в цепочке движется по определенному закону, т. е. его смещение из положения равновесия есть заданная функция времени $x(t)$, то смещение маятника, отстоящего от начала цепочки на расстояние z, в любой момент времени t будет точно таким же, как смещение первого маятника в более ранний момент времени $t - z/u$, т. е. будет описываться функцией $x(t - z/u)$.

Пусть при гармонических колебаниях первого маятника его смещение из положения равновесия дается выражением

$$x(t)\ A\cos\omega t. \tag{1}$$

Каждый из маятников цепочки характеризуется тем расстоянием z, на которое он отстоит от начала цепочки. Поэтому его смещение из положения равновесия при прохождении волны естественно обозначить через $x(t, z)$. Тогда, в соответствии со сказанным выше, имеем

$$x(t, z) = A\cos\omega\left(t - \frac{z}{u}\right). \tag{2}$$

Описываемая уравнением (2) волна называется *монохроматической*. Характерным признаком монохроматической волны является то, что каждый из маятников совершает синусоидальное колебание определенной частоты.

Распространение волны по цепочке маятников сопровождается переносом энергии и импульса. Но никакого переноса массы при этом не происходит: каждый маятник, совершая колебания около положения равновесия, в среднем остается на месте.

Поляризация волн. В зависимости от того, в каком направлении происходят колебания маятников, говорят о волнах разной поляризации. Если колебания маятников происходят вдоль направления распространения волны, как на рис. 192, то волна называется *продольной*, если поперек — то *поперечной*. Обычно волны разной поляризации распространяются с разными скоростями.

Рассмотренная цепочка связанных маятников представляет собой пример механической системы с сосредоточенными параметрами.

$k\quad m\quad k\quad m\quad k\quad m$

Рис. 193. Цепочка шариков, соединенных пружинками

Другой пример системы с *сосредоточенными параметрами*, в которой могут распространяться волны, — это цепочка шариков, связанных легкими пружинками (рис. 193). В такой системе инертные

свойства сосредоточены у шариков, а упругие — у пружинок. При распространении волны кинетическая энергия колебаний локализована на шариках, а потенциальная — на пружинках.

Легко сообразить, что такую цепочку соединенных пружинками шариков можно рассматривать как модель одномерной системы с *распределенными параметрами*, например упругой струны. В струне каждый элемент длины обладает одновременно массой, т. е. инертными свойствами, и жесткостью, т. е. упругими свойствами.

Волны в натянутой струне. Рассмотрим поперечную монохроматическую волну, распространяющуюся в бесконечной натянутой струне. Предварительное натяжение струны необходимо потому, что ненатянутая гибкая струна, в отличие от твердого стержня, обладает упругостью только по отношению к деформации растяжения, но не сжатия.

Монохроматическая волна в струне описывается тем же выражением (2), что и волна в цепочке маятников. Однако теперь роль отдельного маятника играет каждый элемент струны, поэтому переменная z в уравнении (2), характеризующая равновесное положение маятника, принимает непрерывные значения. Смещение любого элемента струны из равновесного положения при прохождении волны $x(t, z)$ есть функция двух переменных: времени t и равновесного положения этого элемента z.

Если в формуле (2) зафиксировать z, т. е. рассматривать определенный элемент струны, то функция $x(t, z)$ при фиксированном z дает смещение выделенного элемента струны в зависимости от времени. Это смещение представляет собой гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой A:

$$x(t, z) = A\cos(\omega t + \alpha). \qquad (3)$$

Начальная фаза колебаний этого элемента струны $\alpha = -(\omega/u)z$, т. е. зависит от его равновесного положения z. Все элементы струны при прохождении монохроматической волны совершают гармонические колебания одинаковой частоты и амплитуды, но различающиеся по фазе.

Длина волны. Если в формуле (2) зафиксировать t, т. е. рассматривать всю струну в один и тот же момент времени, то функция $x(t, z)$ при фиксированном t дает мгновенную картину смещений всех элементов струны — как бы моментальную фотографию волны. На этой «фотографии» мы увидим застывшую синусоиду (рис. 194). Период этой синусоиды, т. е. расстояние между соседними горбами или впадинами, называется *длиной волны* λ. Из формулы (2) можно найти, что длина волны связана с частотой ω и скоростью волны u соотношением

$$\lambda = 2\frac{\pi}{\omega}u = uT, \qquad (4)$$

где T — период колебаний.

Картину распространения волны можно представить себе, если эту «застывшую» синусоиду привести в движение вдоль оси z со скоростью u. Две последовательные «моментальные фотографии» волны

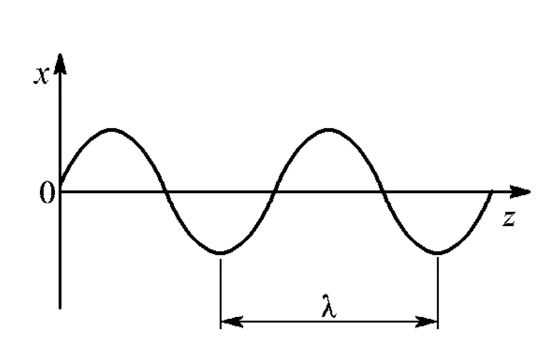


Рис. 194. Смещение разных точек струны в один и тот же момент времени

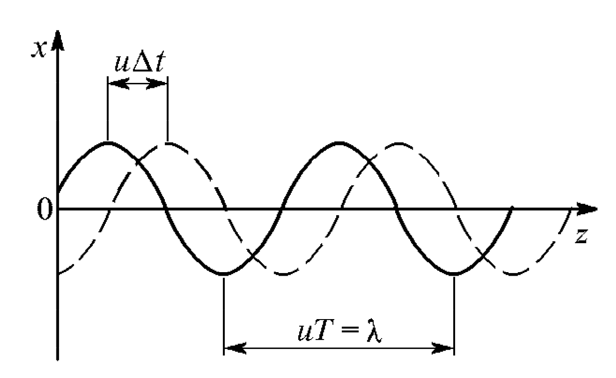


Рис. 195. Картины смещений точек струны в момент времени t и $t+\Delta t$

в моменты времени t и $t+\Delta t$ показаны на рис. 195. Видно, что длина волны λ равна расстоянию, проходимому любым горбом за период колебаний T, в соответствии с формулой (4).

Скорость поперечной волны. Определим скорость распространения монохроматической поперечной волны в струне. Будем считать, что амплитуда A мала по сравнению с длиной волны: $A \ll \lambda$. Пусть волна бежит вправо со скоростью u. Перейдем в новую систему отсчета, движущуюся вдоль струны со скоростью, равной скорости волны u. Эта система отсчета также является инерциальной и, следовательно, в ней справедливы законы Ньютона. Из этой системы отсчета волна кажется застывшей синусоидой, а вещество струны скользит вдоль этой синусоиды влево: любой предварительно окрашенный элемент струны будет казаться убегающим вдоль синусоиды влево со скоростью u.

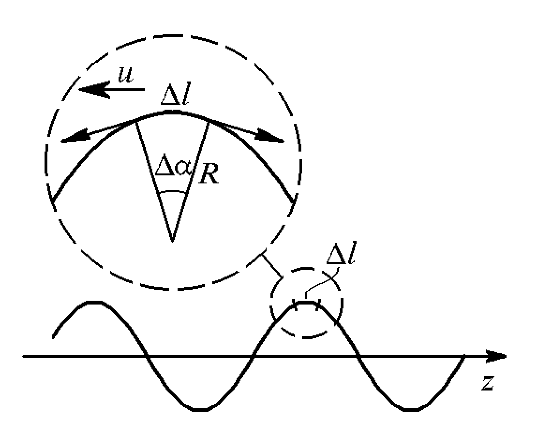


Рис. 196. К расчету скорости распространиния волны в струне

Рассмотрим в этой системе отсчета элемент струны длины Δl, которая много меньше длины волны λ, в тот момент, когда он находится на гребне синусоиды (рис. 196). Применим к этому элементу второй закон Ньютона. Силы, действующие на элемент со стороны соседних участков струны, показаны в выделенном кружке на рис. 196. Поскольку рассматривается поперечная волна, в которой смещения элементов струны перпендикулярны направлению распространения волны, то горизонтальная составляющая силы натя-

жения F постоянна вдоль всей струны. Так как длина рассматриваемого участка $\Delta l \ll \lambda$, то направления сил натяжения, действующих на выделенный элемент, почти горизонтальны, а их модуль можно считать равным F. Равнодействующая этих сил направлена вниз и равна $F\,\Delta\alpha$.

Скорость рассматриваемого элемента равна u и направлена влево, а малый участок его синусоидальной траектории вблизи горба можно считать дугой окружности радиуса R. Поэтому ускорение этого элемента струны направлено вниз и равно u^2/R. Массу элемента струны можно представить в виде $\rho S\,\Delta l$, где ρ — плотность материала струны, а S — площадь сечения, которые ввиду малости деформаций при распространении волны можно считать такими же, как и в отсутствие волны.

На основании второго закона Ньютона

$$F\,\Delta\alpha = \rho\,\Delta l\,\frac{u^2}{R}. \tag{5}$$

Учитывая, что $\Delta l = R\,\Delta\alpha$ (рис. 196), получаем

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}. \tag{6}$$

Это и есть искомая скорость распространения поперечной монохроматической волны малой амплитуды в натянутой струне. Видно, что она зависит только от механического напряжения натянутой струны F/S и ее плотности ρ и не зависит от амплитуды и длины волны. Это значит, что поперечные волны любой длины распространяются в натянутой струне с одинаковой скоростью.

Если в струне одновременно распространяются, например, две монохроматические волны с одинаковыми амплитудами и близкими

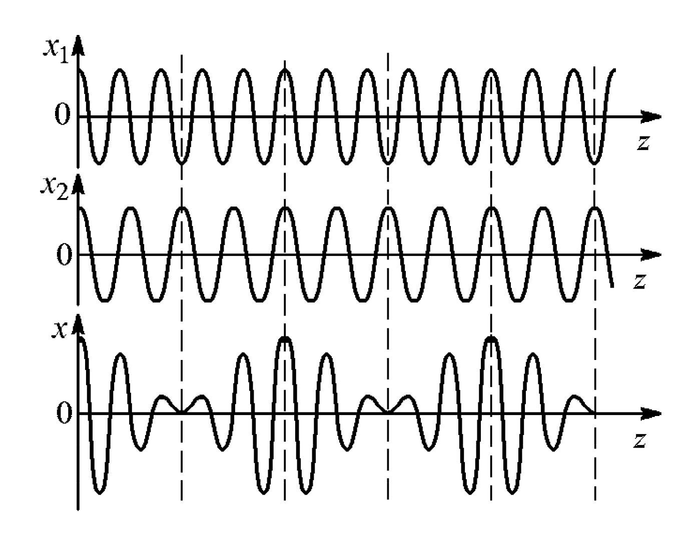


Рис. 197. Сложение двух монохроматических волн с близкими частотами

частотами ω_1 и ω_2, то «моментальные фотографии» этих монохроматических волн и результирующей волны будут иметь вид, показанный на рис. 197. Там, где горб одной волны совпадает с горбом

другой, в результирующей волне смещение максимально. Поскольку соответствующие отдельным волнам синусоиды бегут вдоль оси z с одинаковой скоростью u, то и результирующая кривая бежит с той же самой скоростью, не меняя своей формы. Оказывается, что это справедливо для волнового возмущения любой формы: поперечные волны произвольного вида распространяются в натянутой струне, не меняя своей формы.

О дисперсии волн. Если скорость распространения монохроматических волн не зависит от длины волны или частоты, то говорят, что отсутствует *дисперсия*. Сохранение формы любой волны при ее распространении есть следствие отсутствия дисперсии. Дисперсия отсутствует для волн любого вида, распространяющихся в сплошных упругих средах. Это обстоятельство позволяет очень легко найти скорость продольных волн.

Скорость продольных волн. Рассмотрим, например, длинный упругий стержень площади S, в котором распространяется продольное возмущение с крутым передним фронтом. Пусть в некоторый момент времени t этот фронт, перемещаясь со скоростью u, дошел до точки с координатой z; справа от фронта все точки стержня еще покоятся. Спустя промежуток времени Δt фронт переместится вправо на расстояние $u\,\Delta t$ (рис. 198). В пределах этого слоя все частицы движутся с одной и той же скоростью v. Спустя этот промежуток времени Δt частицы стержня, находившиеся в момент t на фронте волны, переместятся вдоль стержня на расстояние $v\,\Delta t$.

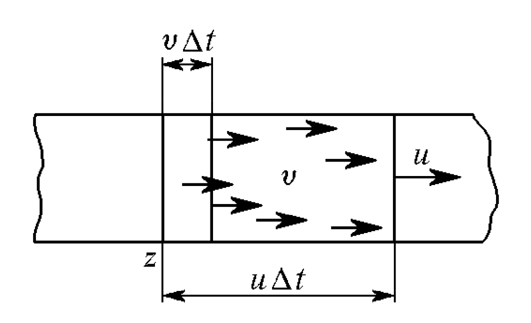


Рис. 198. К расчету скорости распространения волны в струне

Применим к вовлеченной за время Δt в волновой процесс массе стержня $\Delta m = \rho S u\,\Delta t$ закон сохранения импульса:

$$v\,\Delta m = v\rho S u\,\Delta t = F\,\Delta t. \qquad (7)$$

Действующую на массу Δm силу F выразим через деформацию элемента стержня с помощью закона Гука:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES}. \qquad (8)$$

Длина l выделенного элемента стержня равна $u\,\Delta t$, а изменение его длины Δl под действием силы F равно $v\,\Delta t$. Поэтому с помощью (8) находим

$$F = ES\,\frac{v}{u}. \qquad (9)$$

Подставляя это значение в (7), получаем

$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (10)$$

Скорость продольных звуковых волн в упругом стержне зависит только от модуля Юнга E и плотности ρ. Легко убедиться, что в большинстве металлов эта скорость составляет примерно 5 км/с.

Скорость продольных волн в упругой среде всегда больше скорости поперечных. Сравним, например, скорости продольных и поперечных волн u_l и u_t в натянутой гибкой струне. Поскольку при малых деформациях упругие постоянные не зависят от приложенных сил, то скорость продольных волн в натянутой струне не зависит от ее предварительного натяжения и определяется формулой (10).

Для того чтобы сравнить эту скорость с найденной ранее скоростью поперечных волн u_t, выразим силу натяжения струны F, входящую в формулу (6), через относительную деформацию струны $\varepsilon=\Delta l/l_0$, обусловленную этим предварительным натяжением: $\varepsilon=F/(SE)$. Подставляя значение F в формулу (6), получаем

$$u_t=\sqrt{\frac{\varepsilon E}{\rho}}. \qquad (11)$$

Таким образом, скорость поперечных волн в натянутой струне u_t оказывается значительно меньше скорости продольных волн, так как относительное растяжение струны ε много меньше единицы.

Энергия волны. При распространении волн происходит передача энергии без переноса вещества. Энергия волны в упругой среде состоит из кинетической энергии совершающих колебания частиц вещества и из потенциальной энергии упругой деформации среды.

Рассмотрим, например, продольную волну в упругом стержне. В фиксированный момент времени кинетическая энергия распределена по объему стержня неравномерно, так как одни точки стержня в этот момент покоятся, другие, напротив, движутся с максимальной скоростью. То же самое справедливо и для потенциальной энергии, так как в этот момент какие-то элементы стержня не деформированы, другие же деформированы максимально. Поэтому при рассмотрении энергии волны естественно вводить плотность кинетической и потенциальной энергий. Плотность энергии волны в каждой точке среды не остается постоянной, а периодически изменяется при прохождении волны: энергия распространяется вместе с волной.

- Почему при распространении поперечной волны в натянутой струне продольная составляющая силы натяжения струны одинакова вдоль всей струны и не изменяется при прохождении волны?
- Что такое монохроматические волны? Как длина монохроматической волны связана с частотой и скоростью распространения?

- В каких случаях волны называются продольными и в каких — поперечными?
- Покажите с помощью качественных рассуждений, что скорость распространения волны тем больше, чем больше сила, стремящаяся возвратить возмущенный участок среды в состояние равновесия, и тем меньше, чем больше инертность этого участка.
- Какими характеристиками среды определяется скорость продольных волн и скорость поперечных волн? Как связаны между собой скорости таких волн в натянутой струне?

△ **Плотность кинетической энергии бегущей волны.** Рассмотрим плотность кинетической энергии в монохроматической упругой волне, описываемой уравнением (2):

$$x(t, z) = A\cos\omega\left(t - \frac{z}{u}\right). \qquad (12)$$

Выделим в стержне малый элемент между плоскостями z и $z + \Delta z$ такой, что его длина Δz в недеформированном состоянии много меньше длины волны λ. Тогда скорости v всех частиц стержня в этом элементе при распространении волны можно считать одинаковыми. С помощью формулы (12) находим скорость $v = \dot{x}$, рассматривая $x(t, z)$ как функцию времени и считая величину z, характеризующую положение рассматриваемого элемента стержня, фиксированной:

$$v(t, z) = \dot{x} = -\omega A\sin\omega\left(t - \frac{z}{u}\right). \qquad (13)$$

Масса выделенного элемента стержня $\Delta m = \rho S\,\Delta z$, поэтому его кинетическая энергия $\Delta E_{\text{к}}$ в момент времени t есть

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{1}{2}\,\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\,\rho S\,\Delta z\omega^2 A^2\sin^2\omega\left(t - \frac{z}{u}\right). \qquad (14)$$

С помощью выражения (14) находим плотность кинетической энергии $w_{\text{к}}(t, z)$ в точке z в момент времени t:

$$w_{\text{к}}(t, z) = \frac{\Delta E_{\text{к}}}{S\,\Delta z} = \frac{1}{2}\,\rho\omega^2 A^2\sin^2\omega\left(t - \frac{z}{u}\right). \qquad (15)$$

Плотность потенциальной энергии. Перейдем к вычислению плотности потенциальной энергии волны. Поскольку длина выделенного элемента стержня мала по сравнению с длиной волны, то вызываемую волной деформацию этого элемента можно считать однородной. Поэтому потенциальную энергию деформации $\Delta E_{\text{п}}$ можно записать в виде

$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{1}{2}\,S\,\Delta z\,E\left(\frac{\Delta l}{\Delta z}\right)^2, \qquad (16)$$

где Δl — удлинение рассматриваемого элемента стержня Δz, вызванное проходящей волной.

Для нахождения этого удлинения нужно рассмотреть положение плоскостей, ограничивающих выделенный элемент, в некоторый момент времени t. Мгновенное положение любой плоскости, равновесное положение которой характеризуется координатой z, определяется функцией $x(t, z)$, рассматриваемой как функция z при фиксированном t. Поэтому удлинение Δl рассматриваемого элемента стержня, как видно из рис. 199, равно

$$\Delta l = x(t, z + \Delta z) - x(t, z).$$

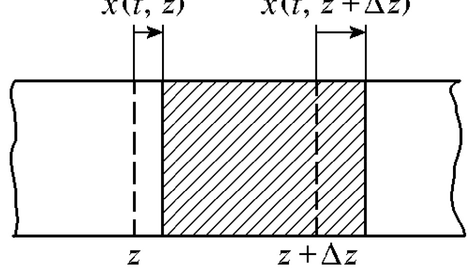


Рис. 199. К расчету относительного удлинения стержня

Относительное удлинение этого элемента есть

$$\frac{\Delta l}{\Delta z} = \frac{x(t, z+\Delta z) - x(t, z)}{\Delta z}.$$

Если в этом выражении перейти к пределу при $\Delta z \to 0$, то оно превращается в производную функции $x(t, z)$ по переменной z при фиксированном t. С помощью формулы (12) получаем

$$\frac{\Delta l}{\Delta z} \to \frac{\omega}{u} A \sin \omega \left(t - \frac{z}{u}\right). \tag{17}$$

Теперь выражение для потенциальной энергии (16) принимает вид

$$\Delta E_\text{п} = \frac{1}{2} S \,\Delta z\, E \left(\frac{\omega}{u} A\right)^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{z}{u}\right), \tag{18}$$

а плотность потенциальной энергии $w_\text{п}(t, z)$ в точке z в момент времени t есть

$$w_\text{п}(t, z) = \frac{\Delta E_\text{п}}{S\,\Delta z} = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{u^2} A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{z}{u}\right). \tag{19}$$

Энергия бегущей волны. Поскольку скорость распространения продольных волн $u = \sqrt{E/\rho}$, то правые части в формулах (19) и (15) совпадают. Это значит, что в бегущей продольной упругой волне плотности кинетической и потенциальной энергий равны в любой момент времени в любой точке среды. Зависимость плотности энергии волны $w = w_\text{к} + w_\text{п}$ от координаты z в фиксированный момент времени t показана на рис. 200.

Обратим внимание на то, что в отличие от локализованных колебаний (осциллятор), где кинетическая и потенциальная энергии изменяются в противофазе (см. рис. 162 и 185), в бегущей волне колебания кинетической и потенциальной энергий происходят в одинаковой фазе. Кинетическая и потенциальная энергии в каждой точке среды одновременно достигают максимальных значений и одновременно обращаются в нуль. Равен-

ство мгновенных значений плотности кинетической и потенциальной энергий есть общее свойство бегущих волн, т. е. волн, распространяющихся в определенном направлении. Можно убедиться, что это справедливо и для поперечных волн в натянутой гибкой струне.

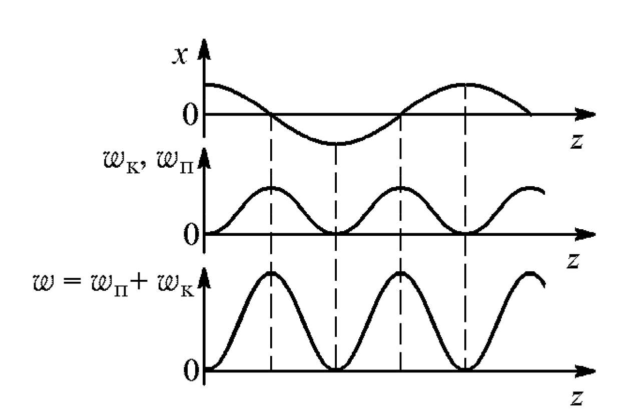


Рис. 200. Смещение частиц среды и плотность энергии в бегущей волне

До сих пор мы рассматривали волны, распространяющиеся в системе, имеющей бесконечную протяженность только по одному направлению: в цепочке маятников, в струне, в стержне. Но волны могут распространяться и в среде, имеющей бесконечные размеры по всем направлениям. В такой сплошной среде волны бывают разного вида в зависимости от способа их возбуждения.

Плоская волна. Если, например, волна возникает в результате гармонических колебаний бесконечной плоскости, то в однородной среде она распространяется в направлении, перпендикулярном этой плоскости. В такой волне смещение всех точек среды, лежащих на любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения, происходит совершенно одинаково. Если в среде не происходит поглощения энергии волны, то амплитуда колебаний точек среды всюду одинакова и их смещение дается формулой (1). Такая волна называется *плоской*.

Сферическая волна. Волну другого вида — *сферическую* — создает в однородной изотропной упругой среде пульсирующий шар. Такая волна распространяется с одинаковой скоростью по всем направлениям. Ее волновые поверхности, т. е. поверхности постоянной фазы, представляют собой концентрические сферы. В отсутствие поглощения энергии в среде легко определить зависимость амплитуды сферической волны от расстояния до центра. Поскольку поток энергии волны, пропорциональный квадрату амплитуды, одинаков через любую сферу, амплитуда волны убывает обратно пропорционально расстоянию r от центра: $A \propto 1/r$. Уравнение продольной сферической волны имеет вид

$$x(t, r) = a\,\frac{r_0}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{u}\right),$$

где a — амплитуда колебаний на расстоянии r_0 от центра волны.

- Как зависит переносимая бегущей волной энергия от частоты и от амплитуды волны?

- Что такое плоская волна? Сферическая волна? Как зависят от расстояния амплитуды плоской и сферической волн?
- Объясните, почему в бегущей волне кинетическая энергия и потенциальная энергия изменяются в одинаковой фазе. ▲

§ 47. Интерференция и дифракция волн. Эффект Доплера

При одновременном распространении нескольких волн смещение частиц среды представляет собой векторную сумму смещений, которые имели бы место при распространении каждой волны в отдельности. Иначе говоря, волны просто накладываются одна на другую, не искажая друг друга. Этот экспериментальный факт был известен еще Леонардо да Винчи, который заметил, что круги волн на воде от разных источников проходят один сквозь другой и распространяются дальше, не претерпев никаких изменений. Утверждение о независимом распространении нескольких волн носит название *принципа суперпозиции* для волнового движения.

Мы уже рассматривали распространение в одном направлении двух одинаково поляризованных монохроматических волн с близкими частотами. В результате наложения таких волн получается почти синусоидальная волна с периодически меняющейся в пространстве амплитудой. «Моментальная фотография» такой волны выглядит как следующие друг за другом группы волн (см. рис. 197), а вызываемое волной колебание в какой-либо фиксированной точке имеет характер биений.

Когерентные волны. Особый интерес представляет случай сложения так называемых *когерентных волн*, т. е. волн от согласованных источников. Простейшим примером когерентных волн являются монохроматические волны одинаковой частоты с постоянной разностью фаз. Для истинно монохроматических волн требование постоянной разности фаз будет лишним, так как они являются бесконечно протяженными в пространстве и во времени и две такие волны одинаковой частоты всегда имеют постоянную разность фаз. Но реальные волновые процессы, даже близкие к монохроматическим, всегда имеют конечную протяженность. Для того чтобы такие квазимонохроматические волны, представляющие собой последовательности отрезков синусоидальных волн, были когерентными, требование постоянной разности фаз является обязательным. Строго говоря, понятие когерентности волн является более сложным, чем описано выше. Подробнее мы познакомимся с ним при изучении оптики.

Интерференционная картина. При сложении когерентных волн наблюдаются явления *интерференции*, заключающиеся в том, что

вызываемая этими волнами картина колебаний является стационарной, т. е. в каждой точке происходят колебания с не зависящей от времени амплитудой. Разумеется, в разных точках амплитуды колебаний будут различаться.

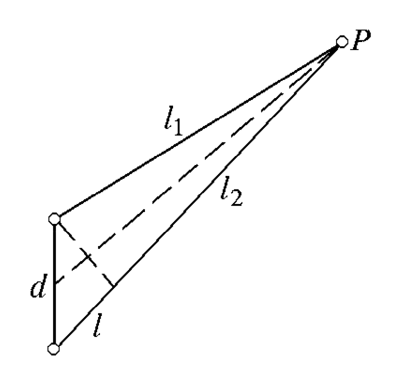


Рис. 201. К интерференции волн от двух точечных источников

Пусть, например, два когерентных источника, находящиеся на расстоянии d друг от друга, создают сферические волны, интерференция которых наблюдается в точке P (рис. 201). Если расстояния l_1 и l_2 от источников до точки наблюдения P велики по сравнению с расстоянием d между источниками, то амплитуды обеих волн в точке наблюдения будут практически одинаковыми. Одинаковыми будут и направления смещений точек среды, вызываемых этими волнами в месте наблюдения.

Результат интерференции в точке P будет зависеть от разности фаз между волнами, приходящими в эту точку. Если источники совершают колебания в одинаковой фазе, то разность фаз волн в точке P зависит только от *разности хода* l волн от источников до точки наблюдения: $l = l_1 - l_2$. Если эта разность хода равна целому числу длин волн: $l = k\lambda$, то волны приходят в точку P в фазе и, складываясь, дают колебание с удвоенной амплитудой. Если же разность хода равна нечетному числу полуволн: $l = (2k+1)\lambda/2$, то волны приходят в точку P в противофазе и «гасят» друг друга: амплитуда результирующего колебания равна нулю. При промежуточных значениях разности хода амплитуда колебаний в точке наблюдения принимает определенное значение в промежутке между указанными предельными случаями. Каждая точка среды характеризуется определенным значением амплитуды колебаний, которое не меняется со временем. Распределение этих амплитуд в пространстве называется *интерференционной картиной.*

Гашение колебаний в одних местах и усиление в других при интерференции волн не связаны, вообще говоря, с какими-либо превращениями энергии колебаний. В точках, где колебания от двух волн гасят друг друга, энергия волн отнюдь не превращается в другие виды, например в теплоту. Все сводится лишь к перераспределению потока энергии в пространстве, так что минимумы энергии колебаний в одних местах компенсируются максимумами в других в полном соответствии с законом сохранения энергии.

Для наблюдения устойчивой интерференционной картины не обязательно иметь два независимых когерентных источника. Вторую, когерентную с исходной волну можно получить в результате отражения исходной волны от границы среды, в которой происходит

распространение волн. В этом случае интерферируют падающая и отраженная волны.

Стоячая волна. Если плоская монохроматическая волна падает по нормали на плоскую границу раздела двух сред, то в результате отражения от границы возникает также плоская волна, распространяющаяся в обратном направлении. Аналогичное явление происходит при отражении распространяющейся в струне волны от закрепленного или свободного конца струны. При равенстве амплитуд падающей и отраженной волн в результате интерференции образуется *стоячая волна*. В стоячей волне, как и вообще при интерференции волн, каждая точка среды совершает гармоническое колебание с некоторой амплитудой, которая, в отличие от случая бегущей волны, в разных точках среды имеет разные значения (рис. 202). Точки, в которых амплитуда колебаний струны максимальна, называются *пучностями* стоячей волны. Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются *узлами*. Расстояние между соседними узлами равно половине длины бегущей волны $\lambda/2$. График зависимости амплитуды стоячей волны от z показан на рис. 202. На этом же рисунке штриховой линией показано положение струны в некоторый момент времени t.

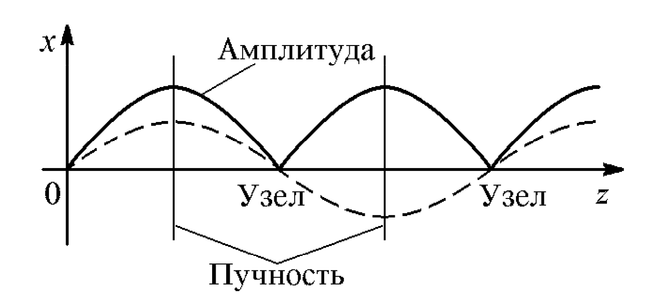


Рис. 202. Стоячая волна в струне с закрепленным концом (в точке $z = 0$)

Колебания всех точек струны, лежащих между двумя любыми ближайшими узлами, происходят в одинаковой фазе. Колебания точек струны, лежащих по разные стороны узла, происходят в противофазе. Фазовые соотношения в стоячей волне хорошо видны из рис. 202. Совершенно аналогично рассматривается стоячая волна, возникающая при отражении от свободного конца струны.

Стоячая волна и маятник. Находящиеся в узлах стоячей волны частицы струны вообще не движутся. Поэтому через узловые точки не происходит передачи энергии. Стоячая волна, по существу, уже не является волновым движением, хотя и получается в результате интерференции двух бегущих навстречу волн одинаковой амплитуды. То, что стоячая волна уже фактически не волна, а скорее просто колебания, можно увидеть и из энергетических соображений.

В бегущей волне кинетическая и потенциальная энергии в каждой точке колеблются в одинаковой фазе. В стоячей волне, как видно, например, из рис. 202, колебания кинетической и потенциальной энергий сдвинуты по фазе так же, как и при колебаниях маятника: в тот момент, когда все точки струны одновременно проходят

через равновесное положение, кинетическая энергия струны максимальна, а потенциальная энергия равна нулю, ибо струна в этот момент не деформирована.

Волновые поверхности. Наглядное представление о распространении монохроматических волн в упругой среде или на поверхности воды дает картина *волновых поверхностей*. Все точки среды, лежащие на одной волновой поверхности, имеют в данный момент одну и ту же фазу колебания. Другими словами, волновая поверхность — это *поверхность постоянной фазы*.

Уравнение волновой поверхности можно получить, приравнивая фазу в уравнении волны постоянной величине. Например, для плоской волны, описываемой уравнением

$$x(t, z) = A \cos \omega \left(t - \frac{z}{u}\right), \tag{1}$$

уравнение волновой поверхности получаем, приравнивая аргумент косинуса произвольной константе C:

$$\omega \left(t - \frac{z}{u}\right) = C,$$

откуда

$$z = ut + C_1. \tag{2}$$

Видно, что для фиксированного момента времени t уравнение (2) — это уравнение плоскости, перпендикулярной оси z. С течением времени эта плоскость перемещается со скоростью u вдоль оси z параллельно самой себе.

Для сферической волны, описываемой уравнением

$$x(t, r) = a \frac{r_0}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u}\right), \tag{3}$$

поверхность постоянной фазы задается уравнением

$$r = ut + C_2. \tag{4}$$

Волновая поверхность в этом случае — это сфера, центр которой совпадает с центром волны, а радиус r растет с постоянной скоростью u.

Фронт волны. Следует различать понятия волновой поверхности и *фронта волны*. Волновая поверхность введена для монохроматической, строго говоря, бесконечно протяженной волны, при распространении которой все точки среды совершают гармонические колебания. Разумеется, это понятие можно применить и к более общему случаю стационарного волнового процесса, при котором все точки среды совершают периодические (но не обязательно гармонические) колебания по закону $f(t - z/u)$, где $f(t)$ — произвольная периодическая функция своего аргумента. Волновые по-

верхности в этом случае имеют точно такой же вид (2), как и в монохроматической волне.

Понятие фронта волны относится к *нестационарному* волновому процессу распространения возмущения. Пусть вся среда находится в покое и в некоторый момент времени включается источник колебаний, от которого в среде начинает распространяться возмущение. Фронт волны — это поверхность, которая отделяет точки среды, пришедшие в движение, от тех точек, до которых возмущение еще не дошло. Очевидно, что в однородной изотропной среде фронт волны от плоского источника колебаний представляет собой плоскость, а фронт волны от точечного источника — сферу.

При распространении волн в однородной среде нахождение волновых поверхностей не представляет труда. Но при наличии в среде неоднородностей, преград, границ раздела и т. д. нахождение волновых поверхностей усложняется.

Принцип Гюйгенса. Простой прием построения волновых поверхностей был предложен Гюйгенсом. Принцип Гюйгенса позволяет находить волновую поверхность в некоторый момент времени, если известно ее положение в предшествующий момент. Для этого каждую точку волновой поверхности в момент времени t следует рассматривать как источник вторичных волн (рис. 203). Волновая поверхность каждой вторичной волны спустя промежуток времени Δt представляет собой в однородной среде сферу радиуса $u\,\Delta t$. Искомая волновая поверхность в момент времени $t + \Delta t$ — это геометрическая огибающая волновых поверхностей вторичных волн. Принцип Гюйгенса можно применять и для нахождения фронта волны в случае нестационарного волнового процесса.

Рис. 203. Построение волновой поверхности по принципу Гюйгенса

В первоначальной формулировке Гюйгенса этот принцип представлял собой по существу лишь удобный рецепт для нахождения волновых поверхностей, ибо он не объяснял, например, то, почему положение волновой поверхности дает именно передняя огибающая вторичных волн и каков смысл задней огибающей поверхности, показанной на рис. 203 штриховой линией. Обоснование принципа Гюйгенса было дано Френелем на основе учета интерференции вторичных волн. С применением принципа Гюйгенса—Френеля мы встретимся при изучении оптики.

Легко видеть, что в простых случаях распространения плоской или сферической волны в однородной среде принцип Гюйгенса приводит к правильным результатам (2) и (4): плоская волна остается плоской, а сферическая — сферической. Принцип Гюйгенса позво-

ляет найти закон отражения и преломления плоской волны на бесконечной плоской границе раздела двух однородных сред.

Волны в неоднородной среде. С помощью принципа Гюйгенса можно объяснить, почему происходит поворот волновой поверхности при распространении волн в неоднородной среде. Пусть, например, плотность среды ρ возрастает в направлении оси y (рис. 204) таким образом, что скорость распространения волн $u(y)$ уменьшается вдоль y по линейному закону. Если в какой-то момент времени t волновая поверхность S представляет собой плоскость $z = 0$, то спустя малый промежуток времени, в момент $t + \Delta t$, эта волновая поверхность, как видно из рис. 204, поворачивается и занимает новое положение S'. Спустя следующий малый промежуток времени она занимает положение S'' и т. д.

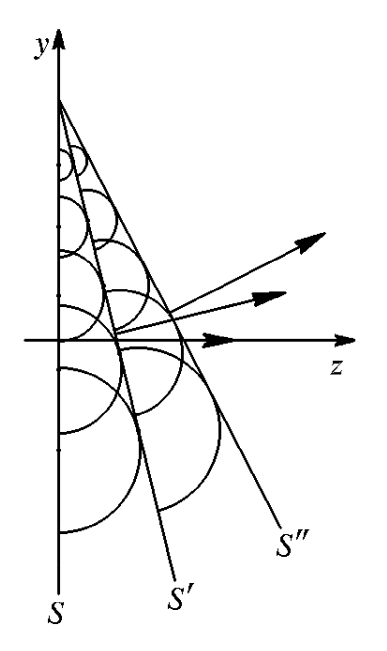


Рис. 204. Поворот волновой поверхности в неоднородной среде

Описанные явления удобно наблюдать при распространении волн на поверхности и звуковых волн в воздухе. Преломление звука, вызванное неоднородностью атмосферного воздуха, приводит к ряду интересных явлений. Жители прибрежных поселков часто слышат голоса из лодок, находящихся очень далеко. Так бывает, когда температура воздуха наверху выше, чем на поверхности воды, т. е. внизу воздух имеет большую плотность. Это значит, что скорость звука внизу, у поверхности воды, меньше, чем вверху. Тогда звуковая волна, которая должна была бы под углом уходить вверх, преломляется в сторону воды и распространяется вдоль ее поверхности. Вдоль поверхности воды образуется своего рода волновод, по которому звук может распространяться на большие расстояния без заметного ослабления.

Аналогичный узкий волновод может существовать и в океанских глубинах при определенном сочетании температур и солености слоев воды. В результате образуется тонкий слой, в котором скорость акустических волн меньше, чем в слоях выше или ниже его. Звуковая энергия в таком канале распространяется, по существу, в двух, а не в трех измерениях и поэтому может быть обнаружена на больших расстояниях от источника.

Дифракция волн. Применение принципа Гюйгенса к распространению волн в среде при наличии преград позволяет качественно объяснить явление *дифракции* — загибание волн в область геометрической тени. Рассмотрим, например, плоскую волну, пада-

ющую на плоскую стенку с прямыми краями (рис. 205). Для простоты будем считать, что падающий на стенку участок волны полностью поглощается, так что отраженной волны нет. На рис. 205 показаны построенные по принципу Гюйгенса волновые поверхности позади преграды. Видно, что волны действительно загибаются в область тени.

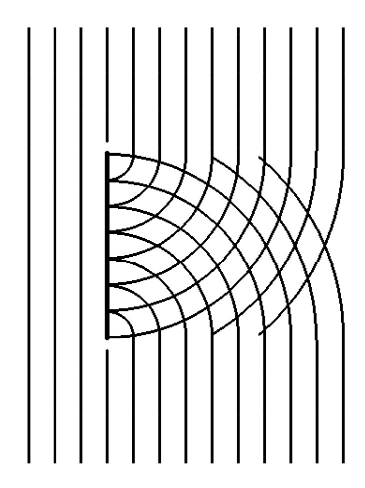


Рис. 205. Дифракция плоской волны

Но принцип Гюйгенса ничего не говорит об амплитуде колебаний в волне за преградой. Ее можно найти, рассматривая интерференцию волн, приходящих в область геометрической тени. Распределение амплитуд колебаний позади преграды называется *дифракционной картиной*. Непосредственно за преградой амплитуда колебаний очень мала. Чем дальше от преграды, тем заметнее становится проникновение колебаний в область геометрической тени.

Полный вид дифракционной картины позади преграды зависит от соотношения между длиной волны λ, размером преграды d и расстоянием L от преграды до точки наблюдения. Если длина волны λ больше размеров препятствия d, то волна его почти не замечает. Если длина волны λ одного порядка с размером преграды d, то дифракция проявляется даже на очень малом расстоянии L и волны за преградой лишь чуть-чуть слабее, чем в свободном волновом поле с обеих сторон. Если, наконец, длина волны много меньше размеров препятствия, то дифракционную картину можно наблюдать только на большом расстоянии от преграды, величина которого зависит от λ и d.

Волна от движущегося источника. Принцип Гюйгенса позволяет найти вид фронта волны для нестационарного волнового процесса, возникающего при движении источника колебаний в неподвижной среде. Здесь возможны два существенно различных случая: скорость источника v меньше скорости распространения волн в среде u и, наоборот, $v > u$. Пусть источник начинает двигаться из точки O по прямой с постоянной скоростью v, постоянно возбуждая колебания. В первом случае, когда $v < u$, вопрос о форме фронта волны и его положении решается очень просто: фронт будет сферическим, а центр его совпадает с положением источника в начальный момент времени, так как след от всех последующих возмущений окажется внутри этой сферы (рис. 206).

Действительно, будем рассматривать создаваемые движущимся источником возмущения через равные промежутки времени τ. Точки O_1, O_2 и O_3 дают положения источника в момент времени τ, 2τ и 3τ. Каждая из этих точек может рассматриваться как центр сферической волны, испущенной источником в тот момент,

когда он находится в этой точке. На рис. 206 изображены положения фронтов этих волн в момент времени 3τ, когда источник на-

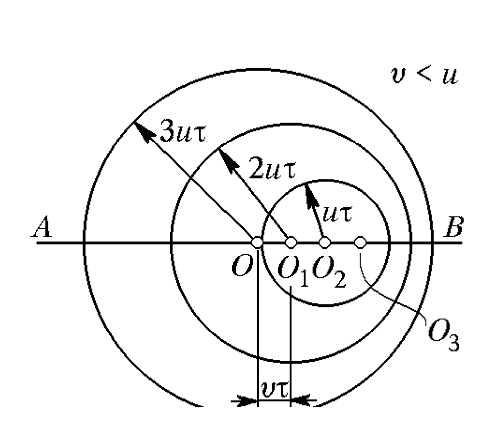


Рис. 206. Волновые поверхности при движении источника со скоростью, меньшей скорости волн

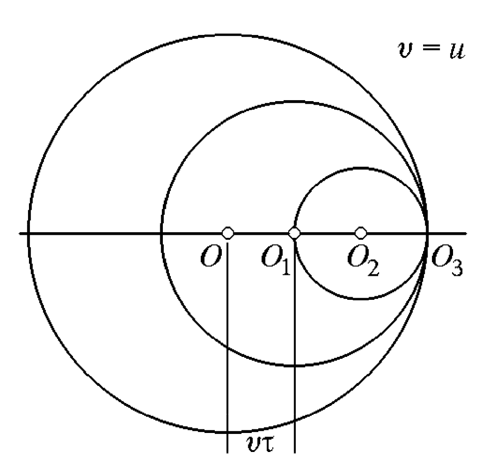


Рис. 207. Волновые поверхности при движении источника со скоростью, равной скорости волн

ходится в точке O_3. Так как $u > v$, то фронт каждой последующей волны целиком лежит внутри фронта предыдущей.

Если скорость источника равна скорости распространения волн в среде, то, как показано на рис. 207, фронты всех волн, испущенных в точках O, O_1 и O_2, соприкасаются в точке O_3, где находится в данный момент источник. Если на фронте каждой волны возникает некоторое уплотнение среды, то непосредственно перед движущимся источником, где фронты всех волн соприкасаются, уплотнение может быть значительным.

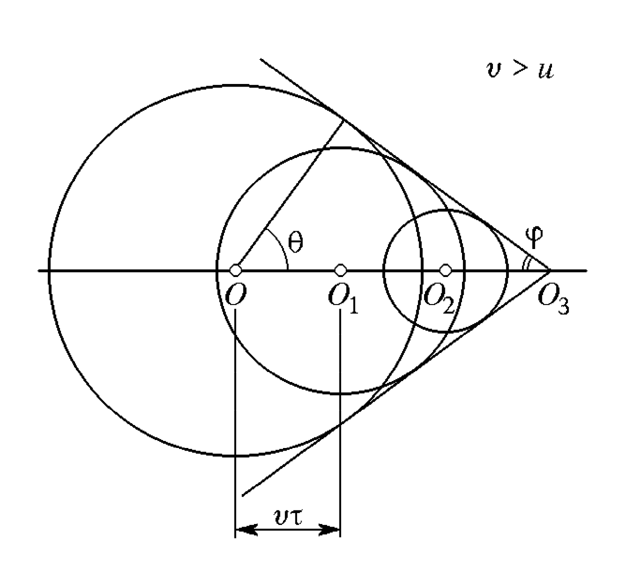


Рис. 208. Волновые поверхности при движении источника со скоростью, превышающей скорости волн

Конус Маха. Особенно интересен случай, когда скорость источника больше скорости распространения волн в среде: $v > u$. Источник опережает созданные им волны. Положение фронтов волн, испущенных в точках O, O_1 и O_2, для того момента времени, когда источник находится в точке O_3, показано на рис. 208. Огибающая этих фронтов представляет собой поверхность кругового конуса, ось которого совпадает с траекторией источника, вершина в каждый момент времени совпадает с источником, а угол φ между образующей и осью определяется, как ясно из рис. 208, соотношением

$$\sin \varphi = \frac{u}{v}. \qquad (5)$$

Такой фронт волны получил название *конуса Маха*. С такой формой фронта волны приходится сталкиваться во всех случаях движения тел со сверхзвуковой скоростью — снарядов, ракет, реактивных самолетов. В тех случаях, когда уплотнение среды на фронте волны значительно, фронт волны можно сфотографировать. На рис. 209, сделанном по фотографии, показаны конус Маха пули, движущейся со сверхзвуковой скоростью, и фронт звуковой волны, созданной пулей при ее движении в стволе с дозвуковой скоростью. Снимок сделан в тот момент, когда пуля обгоняет фронт звуковой волны.

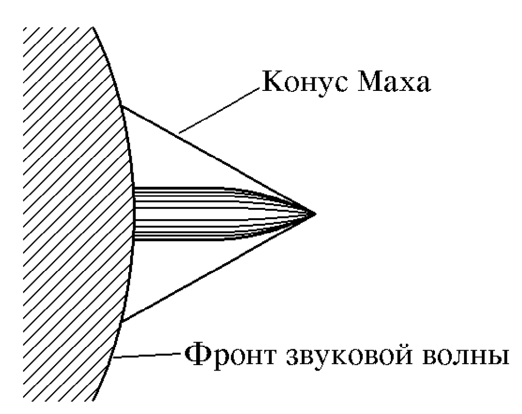


Рис. 209. Конус Маха и фронт звуковой волны при движении источника со скоростью, меньшей скорости волн

Аналогом конуса Маха в оптике является черенковское излучение, возникающее при движении заряженных частиц в веществе со скоростью, превышающей скорость света в этой среде.

Эффект Доплера. Из рис. 206 видно, что при движении источника монохроматических волн длина излучаемых по разным направлениям волн различна и отличается от длины волны, которую испускал бы неподвижный источник. Если считать промежуток времени τ равным периоду колебаний $T = 2\pi/\omega$, то сферы на рис. 206 можно рассматривать как последовательные гребни (или впадины) волн, а расстояние между ними — как длину волны, излучаемой в соответствующем направлении. Видно, что длина волны, излучаемой по направлению движения источника, уменьшается, а в противоположном направлении — увеличивается. Понять, как это происходит, помогает рис. 210: источник начинает очередной период излучения волны, находясь в точке O, и, двигаясь в том же направлении, что и волна, заканчивает период, находясь в точке O_1. В результате длина излученной волны λ' оказывается меньше, чем $\lambda = uT$, на величину vT:

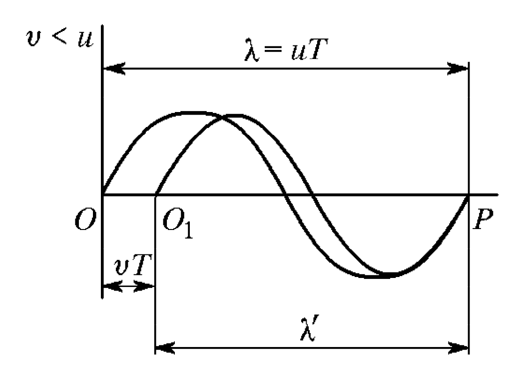


Рис. 210. К объяснению эффекта Доплера

$$\lambda' = \lambda - vT = (u - v)T = \frac{u - v}{v}. \qquad (6)$$

Неподвижный приемник, регистрирующий эти волны, будет принимать колебания с частотой ν', отличной от частоты колебаний

источника ν:

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - v}\,\nu. \tag{7}$$

Эта формула справедлива как в случае приближения источника к неподвижному приемнику, так и в случае удаления. При приближении скорость источника v берется с положительным знаком, при удалении — с отрицательным.

Если источник движется с дозвуковой скоростью, то при приближении частота принимаемого звука выше, а при удалении — ниже, чем при неподвижном источнике. Такое изменение высоты звука легко заметить, слушая звук гудка проносящегося мимо поезда или автомобиля. Если скорость приближения источника звука к приемнику стремится к скорости звука, то согласно (6) длина волны λ' стремится к нулю, а частота ν' — к бесконечности.

Если v больше u, то сначала мимо приемника промчится источник и только потом придут созданные им при приближении звуковые волны. Эти волны будут приходить в обратной последовательности по сравнению с тем, как они излучались: волны, излученные раньше, придут позже. В этом смысл отрицательного значения частоты ν', получаемого из формулы (7) при $v > u$.

Изменение частоты колебаний, регистрируемых приемником, происходит и в том случае, когда источник волн неподвижен в среде, а движется приемник. Если, например, приемник приближается к источнику со скоростью $v_{\text{пр}}$, то его скорость относительно гребней волн равна $u + v_{\text{пр}}$. Поэтому регистрируемая им частота колебаний равна

$$\nu' = \frac{u + v_{\text{пр}}}{\lambda} = \frac{u + v_{\text{пр}}}{u}\,\nu. \tag{8}$$

Эта формула справедлива и при удалении приемника от неподвижного источника, только скорость $v_{\text{пр}}$ нужно взять с отрицательным знаком. Если приемник удаляется от источника со сверхзвуковой скоростью, то он догоняет ранее испущенные волны и регистрирует их в обратной последовательности.

Явление изменения частоты принимаемых волн при движении источника или приемника относительно среды называется *эффектом Доплера*.

Акустические волны. Для человеческого уха спектр слышимых звуков простирается от 20 до 20 000 Гц. Но эти пределы доступны только очень молодым людям. С возрастом чувствительность к верхней области спектра утрачивается. Воспринимаемый на слух диапазон значительно больше того сравнительно узкого диапазона частот, в котором заключены звуки человеческой речи.

Некоторые существа могут производить и слышать звуки далеко за пределами воспринимаемого человеком диапазона частот. Летучие

мыши и дельфины используют *ультразвук* (частота которого лежит выше верхней границы слышимых звуков) как своего рода «радар» (или «сонар») для эхолокации, т. е. для определения положения предметов. Ультразвук широко применяется в технике.

Акустические колебания с частотами ниже нижней границы слышимых звуков называются *инфразвуком*. Они, как правило, вызывают у людей неприятные, тревожные ощущения.

- В каких пределах может изменяться амплитуда при сложении двух монохроматических волн одинаковой частоты в зависимости от разности их фаз?
- Опишите вид интерференционной картины, создаваемой двумя когерентными точечными источниками.
- Почему плохо слышно, когда человек кричит против ветра? Конечно, встречный ветер уменьшает скорость звука, но ведь это уменьшение очень незначительно и само по себе не может объяснить наблюдаемого эффекта: скорость звука в воздухе около 340 м/с, а скорость ветра обычно не превышает 10—15 м/с. Для объяснения эффекта нужно принять во внимание, что вблизи земли скорость ветра меньше, чем наверху.
- Как явления интерференции согласуются с законом сохранения энергии?
- Почему в тех случаях, когда длина волны много меньше размеров преграды, дифракционную картину можно наблюдать только на очень больших расстояниях от преграды?
- В каком случае сдвиг частоты звуковых колебаний в эффекте Доплера проявляется сильнее: при движении источника звука или при движении приемника с такой же скоростью?
- Применимы ли формулы (7) и (8) для сдвига частоты при эффекте Доплера в случае движения источника или приемника звука со сверхзвуковой скоростью?
- Приведите известные вам примеры применения ультразвука в технике.

V. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

§ 48. Гидростатика

В гидростатике изучается равновесие жидкости и воздействие покоящейся жидкости на погруженные в нее тела. Медленное изменение формы жидкости без изменения ее объема может происходить под действием сколь угодно малой силы. В поле тяжести жидкость не обладает собственной формой, а принимает форму сосуда. Поверхность покоящейся жидкости перпендикулярна направлению силы тяжести (горизонтальна) независимо от формы сосуда. В сообщающихся сосудах однородная по плотности жидкость устанавливается на одном уровне (рис. 211).

Закон Паскаля. *Давлением* p в жидкости называется отношение модуля силы F, действующей перпендикулярно выделенной площадке, к ее площади S:

$$p = \frac{F}{S}. \qquad (1)$$

Давление — скалярная величина. Давление в жидкости не зависит от ориентации выделенной площадки. Согласно закону Паскаля оказываемое внешними силами давление передается жидкостью

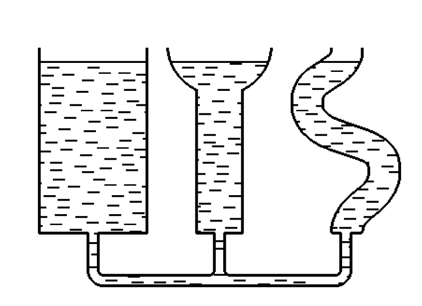


Рис. 211. Сообщающиеся сосуды

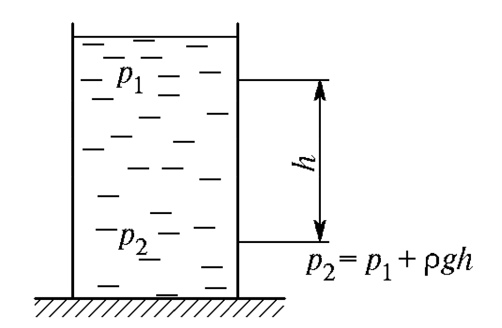


Рис. 212. Давление жидкости на разной глубине

одинаково по всем направлениям. На законе Паскаля основано действие многих гидравлических устройств — прессов, тормозных систем автомобиля, гидроприводов, гидроусилителей и т. п.

В гидравлическом прессе небольшая сила F_1, приложенная к поршню малой площади, трансформируется в большую силу F_2,

действующую на больший поршень:

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}, \tag{2}$$

так как

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}. \tag{2}$$

В поле тяжести давление в жидкости увеличивается с глубиной погружения благодаря весу самой жидкости. Для несжимаемой жидкости, где плотность ρ постоянна (рис. 212),

$$p_2 = p_1 + \rho g h. \tag{3}$$

Для сжимаемой жидкости или газа зависимость давления от высоты становится сложнее.

Суммарное давление p в жидкости складывается из давления p_0, производимого внешними силами на поверхность жидкости, и давления $\rho g h$, обусловленного весом столба жидкости:

$$p = p_0 + \rho g h. \tag{4}$$

Это полное давление называется *гидростатическим*.

Гидростатический парадокс. Гидростатический парадокс заключается в том, что сила «весового» давления жидкости на дно сосуда ($\rho g h S$) может не совпадать с весом налитой жидкости. В расширяющихся кверху сосудах сила давления меньше веса жидкости, в суживающихся — больше. Если жидкость налита до одной и той же

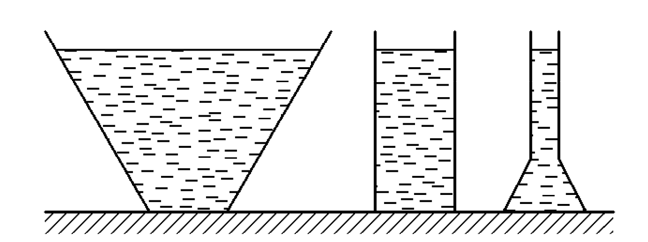


Рис. 213. Гидростатический парадокс: сила давления жидкости на дно одинакова во всех трех случаях

высоты в сосуды разной формы, но с одинаковой площадью дна (рис. 213), то, несмотря на различный вес жидкости, сила «весового» давления на дно одинакова для всех сосудов и равна весу жидкости в цилиндрическом сосуде. Объясняется парадокс тем, что сила давления жидкости на наклонные стенки имеет вертикальную составляющую, направленную вниз в расширяющемся сосуде и вверх — в суживающемся.

Закон Архимеда. Наличие обусловленного полем тяжести гидростатического давления приводит к существованию статической

подъемной силы, действующей на погруженные в жидкость тела. Закон, определяющий значение выталкивающей силы, был открыт Архимедом: эта сила равна весу жидкости, объем которой совпадает с объемом погруженной в жидкость части тела.

В справедливости этого утверждения легко убедиться следующим образом. Выделим в жидкости объем произвольной формы. В состоянии равновесия действующая на жидкость в выделенном объеме сила тяжести уравновешивается силами гидростатического давления, действующими на поверхность выделенного объема со стороны окружающей жидкости.

Если заменить выделенный объем жидкости твердым телом точно такой же формы, то действующие на поверхность тела силы гидростатического давления окружающей жидкости, очевидно, не изменятся и, следовательно, их равнодействующая будет по-прежнему равна весу выделенного объема жидкости и направлена вертикально вверх. Это и есть архимедова выталкивающая сила, действующая на погруженное в жидкость тело. Очевидно, что линия действия этой силы проходит через центр масс выделенного объема жидкости и не зависит от того, где расположен центр масс погруженного тела.

Плавание тел. Если средняя плотность тела меньше плотности жидкости, то часть тела выступает над поверхностью. В этом случае говорят, что тело плавает. Для строительства кораблей большим значение имеет вопрос *устойчивости* плавания. Эта устойчивость определяется положением *метацентра*. На рис. 214 изображен корабль, накрененный на некоторый угол α от вертикального положения. При этом центр масс вытесненной им в этом наклонном положении воды находится в точке B, смещенной из плоскости симметрии корабля NN в ту же сторону, куда накренился корабль. Проведем через точку B вертикаль, которая представляет собой линию действия выталкивающей силы. Точка C пересечения этой линии с плоскостью симметрии корабля называется метацентром.

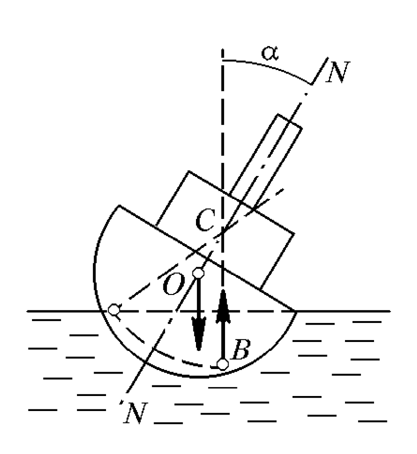


Рис. 214. Устойчивость плавания корабля в вертикальном положении

Если метацентр лежит выше центра масс корабля O, то момент выталкивающей силы относительно центра масс корабля стремится возвратить корабль в вертикальное положение, т. е. корабль плавает устойчиво. Если же метацентр лежит ниже центра масс корабля, то плавание корабля в вертикальном положении будет неустойчивым.

Устойчивость погруженного тела. Если средняя плотность тела равна плотности жидкости, то архимедова выталкивающая сила

равна весу тела. В этом случае тело целиком погружено в жидкость и находится в состоянии равновесия. Если бы тело, как и жидкость, было абсолютно несжимаемым (или сжимаемости тела и жидкости были одинаковы), то это равновесие было бы безразличным. Но у реальных твердых материалов сжимаемость, как правило, меньше сжимаемости жидкости. Тела из таких материалов при равенстве их плотности плотности жидкости должны были бы устойчиво плавать в погруженном состоянии на некоторой глубине. Но практически так никогда не бывает, так как совпадение плотности жидкости и плотности материала почти невероятно.

Однако сделать *среднюю* плотность твердого тела равной плотности жидкости не представляет труда. Средняя плотность подводной лодки в погруженном состоянии как раз равна плотности воды. Может ли такая лодка зависнуть на некоторой глубине в погруженном состоянии? Оказывается, нет. Пусть на некоторой глубине средняя плотность лодки равна плотности воды. Представим себе, что вследствие случайных причин лодка погрузилась чуть глубже. Сжимаемость лодки определяется не столько сжимаемостью материала, из которого она сделана, сколько жесткостью ее конструкции. Практически эта сжимаемость всегда гораздо больше сжимаемости воды. Поэтому при небольшом погружении увеличившееся гидростатическое давление приведет к деформации корпуса и средняя плотность лодки станет больше плотности воды — лодка будет погружаться еще глубже. Совершенно аналогично при случайном уменьшении глубины погружения условие равновесия также нарушится и лодка будет всплывать.

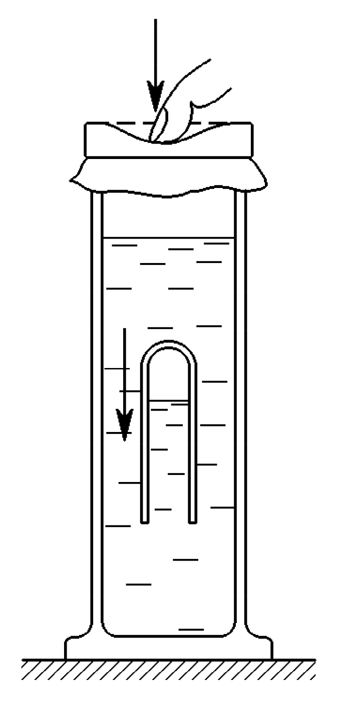


Рис. 215. Плавание тела в погруженном состоянии

Можно проделать простой опыт, иллюстрирующий условия плавания тела в погруженном состоянии. В высоком цилиндрическом сосуде с водой плавает перевернутая отверстием вниз пробирка, частично заполненная воздухом (рис. 215). Количество воздуха в пробирке нужно подобрать таким образом, чтобы из воды чуть высовывалось только донышко пробирки: средняя плотность плавающей пробирки с воздухом немного меньше плотности воды. Отверстие цилиндрического сосуда затягивается тонкой прочной резиновой пленкой. При нажатии пальцем на пленку давление воздуха над поверхностью воды в цилиндре возрастет. В результате воздух в пробирке сжимается и средняя плотность пробирки с воздухом становится больше плотности воды — пробирка тонет. Если отпустить пленку, то давление примет первоначальное значение и пробирка всплывет.

Разумеется, когда пробирка находится на некоторой глубине, можно, изменяя нажатие на пленку, добиться равенства плотности воды и средней плотности пробирки. Но равновесие пробирки, как и в случае подводной лодки, будет неустойчивым. Добиться того, чтобы пробирка осталась неподвижной на некоторой глубине, можно только динамически, периодически увеличивая и уменьшая нажатие на пленку. При этом средняя плотность пробирки будет то больше, то меньше плотности воды. Но благодаря инерции пробирки и вязкости жидкости можно добиться того, что колебания пробирки будут практически незаметными.

В отличие от рассмотренных выше примеров, дирижабль с жесткой оболочкой может устойчиво висеть в воздухе. Пусть на некоторой высоте средняя плотность дирижабля равна плотности воздуха на этой высоте. Вследствие жесткости оболочки дирижабля можно считать, что его средняя плотность при изменении внешнего давления остается неизменной. Поэтому при случайном уменьшении высоты подъемная сила возрастает, так же плотность воздуха при этом увеличивается.

Гидростатическое взвешивание. На законе Архимеда основан экспериментальный метод определения плотности различных тел с помощью гидростатических весов. Для этого измеряют вес P тела с неизменной плотностью сначала в воздухе, а затем — вес P_1 при погружении его в жидкость с известной плотностью ρ_1. Тогда

$$\rho = \rho_1 \frac{P}{P - P_1}. \tag{5}$$

При взвешивании тело должно быть полностью погружено в жидкость.

Для определения таким методом неизвестной плотности какой-либо жидкости нужно взвесить тело трижды, определяя его вес P в воздухе, вес P_1 в жидкости с известной плотностью ρ_1 и вес P_2 в жидкости, плотность ρ_2 которой подлежит определению. В этом случае

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{P - P_2}{P - P_1}. \tag{6}$$

Для этого измерения можно использовать любое твердое тело, которое тонет и не растворяется в каждой из жидкостей. Знать его объем и плотность не требуется.

- Почему в состоянии равновесия жидкость действует на твердое тело только по нормали к его поверхности?
- Почему не опрокидывается корабль, центр масс которого расположен выше ватерлинии? Почему деревянный брусок плавает на воде плашмя, а не вертикально?

- При каких условиях равновесие полностью погруженного в жидкость тела будет устойчивым?
- Докажите справедливость формул (5) и (6) для гидростатического взвешивания.

§ 49. Движение идеальной жидкости

Не оказывая сопротивления изменению формы, жидкости и газы, тем не менее, сопротивляются изменению объема. Газы обладают способностью к неограниченному расширению, т. е. заполняют полностью предоставленный им объем. Напротив, для жидкости характерен определенный собственный объем, который лишь незначительно меняется при изменении внешнего давления. Во многих случаях изменение объема жидкости бывает столь малым, что им можно полностью пренебречь и рассматривать жидкость как несжимаемую, т. е. имеющую постоянную плотность. Такая жидкость называется *абсолютно несжимаемой*.

Несжимаемая жидкость. Как и в случае абсолютно твердого тела, применимость представления об абсолютно несжимаемой жидкости определяется не столько свойствами самой жидкости, сколько условиями, в которых она находится. Например, при изучении распространения звуковых волн в жидкости всегда необходимо учитывать ее сжимаемость, в то время как при изучении движения потоков не только жидкость, но и газ часто можно рассматривать как несжимаемые.

Линии тока. При кинематическом описании движения жидкости или газа можно поступать следующим образом. Будем следить за определенной точкой пространства и фиксировать величину и направление скоростей различных «частиц» жидкости, которые в разные моменты времени проходят через эту точку. Если проделать это для всех точек пространства и указать скорости частиц жидкости во всех точках в определенный момент времени, то получится мгновенная картина распределения скоростей в движущейся жидкости — так называемое *поле скоростей*. Линии, касательные к которым во всех точках совпадают с направлениями скоростей жидкости в этих точках, называются *линиями тока* (рис. 216).

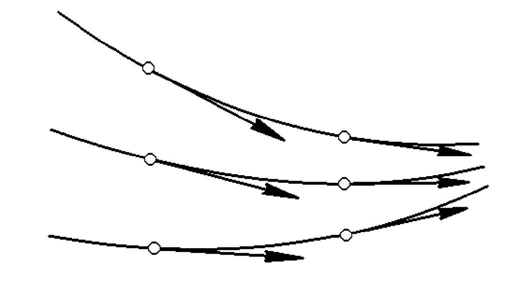


Рис. 216. Линии тока и скорости частиц движущейся жидкости

При стационарном течении жидкости поле скоростей, а следовательно, и линии тока не меняются со временем. В этом случае ли-

нии тока совпадают с траекториями отдельных частиц жидкости, так как каждая частица жидкости приходит в данную точку с той же самой скоростью.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется *трубкой тока* (рис. 217). Такая мысленно выделенная в потоке часть

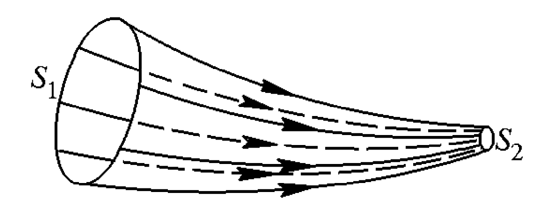


Рис. 217. Трубка тока движущейся жидкости

жидкости — трубка тока, подобно жидкости в настоящей трубе, движется, нигде не пересекая боковой поверхности трубки. При стационарном течении количество жидкости, пересекающей в единицу времени сечение S_1, т. е. «втекающей» в выделенную часть трубки, равно количеству жидкости, «вытекающей» через сечение S_2.

Уравнение неразрывности. Если выбрать трубку тока с поперечным сечением S настолько малым, чтобы скорости жидкости во всех точках сечения были одинаковыми, причем это сечение ориентировано перпендикулярно линиям тока, то масса жидкости m, протекающей через это сечение за время t, будет равна

$$m = \rho v S \tag{1}$$

В стационарном потоке масса m одна и та же для любого поперечного сечения выбранной трубки тока, поэтому согласно (1)

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{2}$$

Если жидкость можно рассматривать как несжимаемую, то $\rho_1 = \rho_2$ и условие (2) принимает вид

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \tag{3}$$

Это соотношение называется *уравнением неразрывности*. Полученный результат (3) справедлив для выбранной трубки тока. При изучении движения потоков жидкости на такие трубки можно разбить все пространство, занимаемое жидкостью.

Идеальная жидкость. Динамика движения реальной жидкости очень сложна. Для упрощения ее описания в некоторых случаях можно пренебречь силами внутреннего трения. Такую жидкость называют *идеальной*. При движении идеальной жидкости не происходит превращения механической энергии во внутреннюю, т. е. механическая энергия жидкости сохраняется. Закон сохранения механи-

ческой энергии для идеальной несжимаемой жидкости выражается уравнением Бернулли. Выведем это уравнение.

Уравнение Бернулли. Рассмотрим часть жидкости, заключенную между сечениями S_1 и S_2 некоторой трубки тока, расположенными на

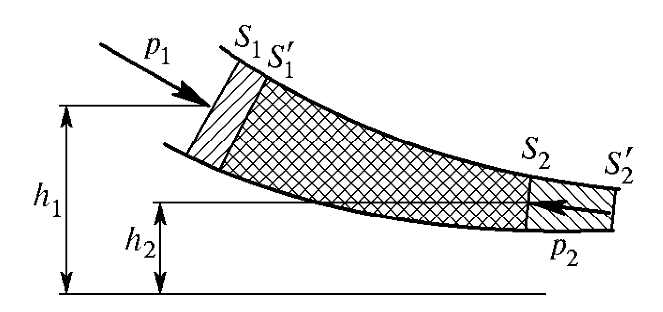


Рис. 218. К выводу уравнения Бернулли

высотах h_1 и h_2 соответственно (рис. 218). За промежуток времени t эта жидкость смещается вдоль трубки тока и занимает новое положение между селениями S_1' и S_2'.

Для малого промежутка времени t можно пренебречь различием между площадями S и S' старых и новых сечений и различием в их высотах. Подсчитаем работу, совершаемую внешними силами над выделенной жидкостью за время t. Силы давления, действующие на боковую поверхность трубки тока, работы не совершают, так как действуют перпендикулярно перемещению. Работа силы давления в сечении S_1 равна $p_1 S_1 v_1 t$, работа в сечении S_2 равна $-p_2 S_2 v_2 t$, так что полная работа внешних сил

$$A = p_1 S_1 v_1 t - p_2 S_2 v_2 t. \qquad (4)$$

В силу стационарности движения энергия жидкости между сечениями S_1' и S_2 не меняется. Эта часть жидкости показана на рис. 218 двойной штриховкой. Поэтому изменение энергии рассматриваемой жидкости равно энергии части жидкости между сечениями S_2 и S_2' минус энергия части жидкости между сечениями S_1 и S_1'. Потенциальная энергия части жидкости между S_2 и S_2' равна $\rho S_2 v_2 t g h_2$, ее кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}\rho S_2 v_2 t v_2^2$. Аналогично записываются выражения для энергии жидкости между сечениями S_1 и S_1'. Поэтому изменение энергии всей выделенной части жидкости в рассматриваемой трубке тока за время t равно

$$\Delta E = \rho S_2 v_2 t g h_2 + \frac{1}{2}\rho S_2 v_2 t v_2^2 - \left(\rho S_1 v_1 t g h_1 + \frac{1}{2}\rho S_1 v_1 t v_1^2\right). \qquad (5)$$

На основании закона сохранения механической энергии работа внешних сил (4) равна изменению энергии системы (5). Учитывая

уравнение неразрывности (3), получаем

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \qquad (6)$$

Это и есть уравнение Бернулли. Оно было выведено для достаточно узкой трубки тока и, строго говоря, справедливо, когда эта трубка тока сжимается в линию тока. Поэтому сумма $p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2$ остается неизменной вдоль одной и той же линии тока.

Давление в потоке. В неподвижной жидкости в состоянии равновесия согласно закону Паскаля давление не зависит от ориентации площадки. А как обстоит дело в движущейся жидкости? Уравнение Бернулли дает возможность ответить на этот вопрос в случае стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости. Оказывается, что измеряемое неподвижным манометром давление зависит от ориентации площадки в потоке.

Представим себе манометр в виде изогнутой трубки, передняя часть которой, обращенная навстречу потоку, запаяна, а в боковой стенке имеется параллельное скорости обтекающей жидкости отверстие (рис. 219): Такая трубка искажает поток только вблизи ее переднего конца, а вблизи отверстия поток практически не меняется.



Рис. 219. Манометрическая трубка в потоке

Рис. 220. Манометрическая трубка с открытым концом

Поэтому давление здесь такое же, как и во всех других точках линии тока, проходящей вблизи отверстия. Соединенный с такой трубкой манометр измеряет давление жидкости p, входящее в уравнение Бернулли. Такое же давление покажет произвольно ориентированный манометр, движущийся вместе с потоком.

Если же взять трубку с открытым передним концом, обращенным навстречу потоку жидкости (рис. 220), то показание соединенного с ней манометра будет больше p. Поясним это. Линии тока вблизи такой трубки показаны на рис. 220. Так как жидкость внутри трубки неподвижна, то скорость жидкости в точке A обращается в нуль. Обозначим давление в этой точке через p_1, а давление и

скорость в потоке вдали от трубки — через p и v. Применяя к выделенной линии тока уравнение Бернулли, получаем

$$p_1 = p + \frac{1}{2}\rho v^2. \tag{7}$$

Именно это давление и показывает соединенный с трубкой манометр. По измерениям значений p и p_1, т. е. располагая трубками обоих типов, можно рассчитать скорость потока v.

Медицинский шприц. С помощью уравнения Бернулли легко оценить скорость истечения жидкости v из шприца. Будем считать жидкость идеальной. Пусть на поршень шприца, который имеет площадь S_0, действует внешняя сила F (рис. 221) и струя жидкости вытекает из иглы с отверстием, имеющим площадь S. Рассмотрим линию тока, проходящую вдоль оси симметрии шприца, и применим к ней уравнение Бернулли. Обозначая скорость поршня и, следовательно, жидкости вблизи него через v_0, имеем

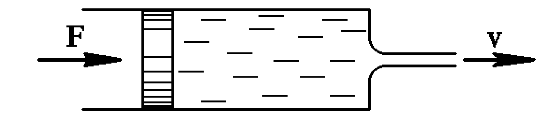


Рис. 221. К расчету скорости истечения жидкости из иглы шприца

$$\frac{F}{S_0} + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = \frac{1}{2}\rho v^2. \tag{8}$$

Из уравнения неразрывности (3) вытекает, что $S_0 v_0 = S v$. Выражая отсюда v_0 и подставляя в (8), получаем

$$\frac{F}{S_0} = \frac{1}{2}\rho v^2\left[1 - \left(\frac{S}{S_0}\right)^2\right]. \tag{9}$$

Обычно площадь отверстия иглы во много раз меньше площади поршня шприца: $S \ll S_0$. Тогда, пренебрегая квадратом отношения S/S_0 по сравнению с единицей, находим скорость истечения

$$v = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_0}}.$$

Формула Торричелли. Как вытекает налитая в широкий сосуд жидкость из небольшого отверстия в дне или боковой стенке под действием силы тяжести (рис. 222)? Скорость истечения идеальной несжимаемой жидкости легко найти с помощью уравнения Бернулли. Рассмотрим линию тока, начинающуюся вблизи свободной поверхности жидкости и проходящую вдоль оси отверстия. Поскольку скорость жидкости вблизи поверхности в широком сосуде пренебрежи-

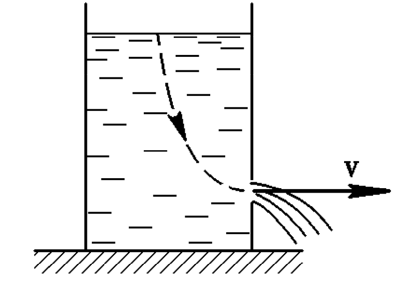


Рис. 222. К расчету скорости истечения жидкости из отверстия

мо мала, то уравнение Бернулли имеет вид

$$\rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2,$$

откуда

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Таким образом, скорость истечения идеальной жидкости из отверстия в сосуде такая же, как и при свободном падении с высоты h. Этот факт был впервые установлен Торричелли.

- Какое предположение лежит в основе модели идеальной жидкости? Зависит ли применимость этой модели только от свойств самой жидкости?
- Почему модель несжимаемой жидкости применима в некоторых случаях и для описания движения газов?
- Объясните физическую причину различия в показаниях манометра при разных ориентациях его чувствительного элемента в потоке жидкости. Зависят ли от ориентации показания манометра, движущегося вместе с жидкостью?
- Получите выражение для скорости истечения жидкости из иглы шприца непосредственно с помощью закона сохранения энергии, не используя уравнения Бернулли.
- Почему иногда из отверстия прохудившегося шланга вода не вытекает, а наоборот, в отверстие засасывается воздух?

△ **Форма струи**. Более сложным является вопрос о форме струи вытекающей жидкости. Оказывается, что форма струи зависит от устройства отверстия. Сравнительно просто исследовать

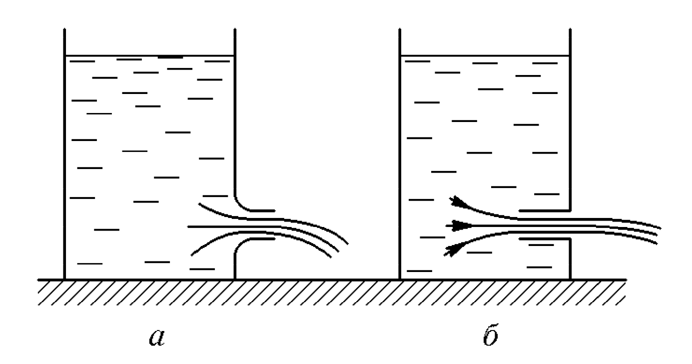


Рис. 223. Зависимость сечения вытекающей струи от формы отверстия

предельные случаи, показанные на рис. 223. В случае *а* линии тока в отверстии перед истечением постепенно меняют направление на параллельное оси трубки. В результате площадь сечения вытекающей струи равна площади сечения отверстия трубки, и сжатия струи не происходит. В случае *б* частицы жидкости вблизи отверстия имеют скорости в поперечных направлениях, что приводит к сжатию струи. Сжатие для этого

случая можно рассчитать с помощью закона сохранения импульса.

Будем рассуждать следующим образом. Всюду вблизи боковых стенок сосуда скорость движения жидкости пренебрежимо мала и давление равно гидростатическому. Силы давления жидкости на стенки сосуда взаимно уравновешиваются всюду, за исключением участка, лежащего точно напротив отверстия и имеющего ту же площадь S, что и отверстие. Импульс этой неуравновешенной силы за время t равен $\rho ghSt$.

На основании закона сохранения импульса точно такой же импульс должна унести вытекающая за это время t жидкость. Этот импульс равен произведению массы вытекающей жидкости на скорость ее истечения v. Если площадь сечения струи после сжатия $S_{\text{сж}}$, то импульс жидкости равен $\rho S_{\text{сж}} vtv$. Поэтому

$$\rho ghSt = \rho S_1 v^2 t.$$

Подставляя сюда скорость истечения жидкости (10), получаем $S_{\text{сж}} = S/2$: поперечное сечение вытекающей струи оказывается вдвое меньше площади отверстия. При всех других формах отверстий, отличающихся от изображенных на рис. 223, сжатие струи заключено в промежутке между этими предельными случаями.

Реакция струи. Закон сохранения импульса позволяет объяснить реакцию струи жидкости, которая течет по изогнутой трубе постоянного сечения площадью S (рис. 224). При стационарном течении импульс любого элемента жидкости изменяется только по направлению, оставаясь неизменным по модулю. В трубе, изогнутой под прямым углом, изменение импульса жидкости за время t, как видно из рис. 224, равно

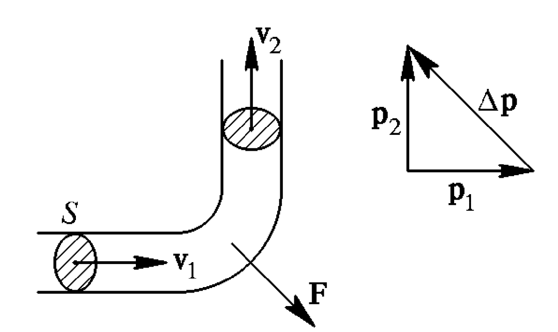


Рис. 224. Реакция струи жидкости при течении по изогнутой трубке

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \rho Sv(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)t, \tag{11}$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — равные по модулю скорости жидкости до и после изгиба трубы: $v_1 = v_2 = v$. Таким образом, действующая на трубу сила, обусловленная движением жидкости, равна

$$F = \sqrt{2}\ \rho Sv^2. \tag{12}$$

Направление этой силы указано на рисунке. Разобранный пример объясняет принцип действия гидравлических турбин.

Гидравлический удар. В заключение рассмотрим явление так называемого гидравлического удара. Нередко можно видеть, как

в твердых камнях выбиты углубления в тех местах, куда попадают отдельные падающие сверху капли воды. Дело в том, что при ударе капель о преграду, в отличие от постоянно действующей струи, происходит внезапно возникающий контакт струи с преградой. В непрерывной струе, как мы видели, на поставленную поперек стационарного потока площадку действует добавочная сила $\rho v^2/2$ на единицу площади. Если же неподвижная площадка появляется в потоке внезапно, то набегающая на нее жидкость вынуждена затормозиться.

Абсолютно несжимаемая жидкость, движущаяся по трубе, при мгновенном перекрывании трубы остановилась бы вся сразу, что привело бы к бесконечно большой силе давления на преграду. Поэтому представление об абсолютно несжимаемой жидкости в таких условиях неприменимо. В сжимаемой жидкости при внезапном появлении преграды за время t остановится только та часть жидкости, до которой успеет дойти волна деформации, распространяющаяся в жидкости навстречу потоку от преграды. Такая волна распространяется со скоростью, равной скорости звука u в данной жидкости.

Закон сохранения импульса позволяет рассчитать силу F, действующую на внезапно возникающую в трубе сечением S перегородку. Пусть до появления преграды жидкость в трубе имела скорость v. Учитывая, что масса останавливающейся за время t жидкости равна $\rho Sutv$, имеем

$$Ft = \rho Sutv,$$

откуда для развивающегося при гидравлическом ударе добавочного давления $p = F/S$ получаем

$$p = \rho uv \qquad (13)$$

Скорость звука в воде равна примерно 1500 м/с. Поэтому в потоке, имеющем скорость 10 м/с, давление (13), развиваемое при гидравлическом ударе, как нетрудно убедиться, в 300 раз больше давления $\rho v^2/2$ постоянно действующей струи воды.

Явления, связанные с гидравлическим ударом, весьма разнообразны. Например, во время шторма на море можно наблюдать, как волны, бьющие в вертикальную стенку набережной, образуют всплески, имеющие огромную высоту, в десятки раз превосходящую высоту волн на море.

- Почему при истечении жидкости из отверстия в сосуде поперечное сечение струи, как правило, меньше, чем поперечное сечение самого отверстия?
- По каким причинам сужается струя воды, вытекающая из водопроводного крана?
- Почему для объяснения явления гидравлического удара нельзя использовать модель несжимаемой жидкости? ▲

§ 50. Вязкая жидкость. Обтекание тел

В целом ряде практически важных случаев поведение обычной жидкости в пределах известной погрешности эксперимента согласуется с результатами, предсказываемыми теорией движения идеальной несжимаемой жидкости. Но есть немало примеров, когда нельзя пренебрегать внутренним трением в жидкости, называемым *вязкостью*. Большинство интересных явлений при движении жидкости так или иначе связано именно с этим свойством, а в некоторых случаях вязкость жидкости является определяющей.

При изучении идеальной жидкости выдвигалось требование, чтобы нормальная составляющая скорости жидкости на ее границе с твердым телом обращалась в нуль. Касательная составляющая скорости могла иметь произвольное значение. Но оказывается, что во всех случаях, когда это можно проверить экспериментально, скорость жидкости на поверхности твердого тела строго равна нулю, т. е. жидкость как бы прилипает к поверхности, которую она обтекает.

Пограничный слой. Вблизи поверхности твердого тела возникает так называемый *пограничный слой* жидкости, в котором скорость нарастает от нуля до значения скорости в потоке. Влияние вязкости на движение остальной части жидкости мало. Но если, например, вязкая жидкость движется по достаточно узкой трубе, то пограничный слой может заполнить весь объем текущей жидкости и при изучении этого движения пренебрегать вязкостью нельзя. Такое течение имеет очень мало общего с движением идеальной жидкости.

В статическом случае, т. е. в равновесии, никаких напряжений сдвига в жидкости нет. Однако в движущейся жидкости такие напряжения могут быть. Вязкость как раз и описывает такие силы, возникающие в движущейся жидкости. В отличие от твердых тел, где сдвиговое касательное напряжение определяется деформацией сдвига, в жидкости такое напряжение определяется скоростью деформации. Другими словами, жидкости оказывают вязкое, а не упругое сопротивление при изменении формы.

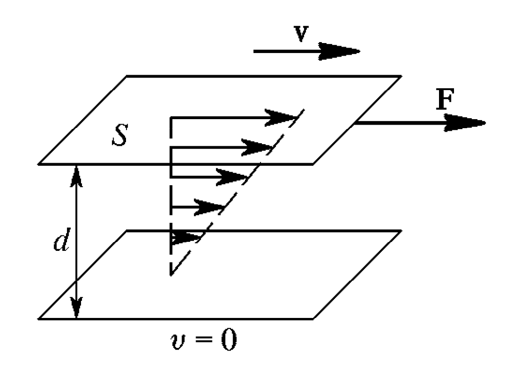


Рис. 225. Вязкая жидкость между плоскими пластинами

Вязкость. Для того чтобы ввести количественную характеристику вязкости жидкости, рассмотрим следующий опыт. Пусть жидкость находится между двумя твердыми плоскими параллельными пластинами (рис. 225). Нижняя пластина неподвижна, а верхняя движется параллельно нижней с малой скоростью v. Опыт показывает, что для поддер-

жания равномерного движения верхней пластины необходима сила F, направленная вдоль пластины и пропорциональная площади пластины S, скорости v и обратно пропорциональная расстоянию d между пластинами:

$$F = \eta \frac{Sv}{d}. \qquad (1)$$

Подчеркнем, что благодаря с «прилипанию» жидкости к поверхности пластины эта сила характеризует *внутреннее трение*, т. е. трение между проскальзывающими относительно друг друга слоями жидкости, а не между жидкостью и твердым телом.

Величина η в (1) описывает вязкие свойства жидкости и называется *вязкостью*. Вязкость жидкости сильно зависит от ее температуры. Так, например, вязкость воды при повышении ее температуры от 0 до 20 °C уменьшается почти вдвое.

При наличии вязкости, т. е. сил внутреннего трения, тормозящих движение жидкости, для поддержания стационарного течения в горизонтальной трубе неизменного сечения необходимо поддерживать постоянную разность давлений на концах трубы. Напомним, что в идеальной жидкости при таком движении давление, как это следует из уравнения Бернулли, одинаково вдоль всей трубы.

Ламинарное течение. Течение жидкости в цилиндрической трубе, при котором скорости частиц жидкости всюду направлены вдоль оси трубы, называется *ламинарным* или слоистым. Такое течение возможно только при не очень большой скорости потока вязкой жидкости в трубах малого поперечного сечения. С увеличением скорости или с увеличением площади сечения трубы характер течения принципиально изменяется. Вместо слоистого течения возникает носящее нерегулярный характер завихрение, или *турбулентное*, течение.

Изменение характера течения можно наблюдать в эксперименте со стеклянными трубками различного сечения при различных перепадах давления, т. е. при различных скоростях жидкости. Линии тока при стационарном течении можно сделать видимыми, впуская во входное сечение стеклянной трубки окрашенную струйку жидкости. При небольшой скорости потока в узкой трубке подкрашенная струйка движется ровно и параллельно оси трубки. При постепенном увеличении скорости потока внезапно начинается нерегулярное движение, которое постепенно захватывает всю трубку, — струйка, ровная у входа, разбивается на множество извилистых струек. Такие нерегулярные изменения движения происходят не из-за изменения внешних условий, а вследствие *неустойчивости* ламинарного течения при больших скоростях.

Турбулентное движение. При стационарном турбулентном движении скорость жидкости в данном месте не остается постоянной, а со-

вершает хаотические колебания и по модулю, и по направлению. Но средняя скорость в данном месте трубы будет постоянна и направлена вдоль оси трубы. На рис. 226*а* показано распределение

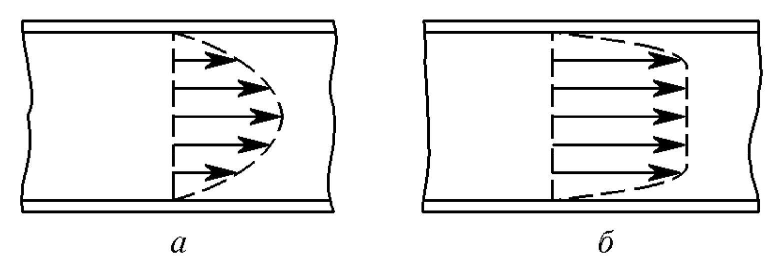


Рис. 226. Профиль скоростей при ламинарном (*а*) и турбулентном (*б*) течении жидкости по трубе

скорости жидкости по селению трубы при ламинарном течении, а на рис. 226*б* — распределение средней скорости при установившемся турбулентном течении. В турбулентном потоке, как видно из рисунка, можно четко выделить пограничный слой жидкости вблизи стенок трубы, где средняя скорость быстро спадает до нуля, в то время как при ламинарном течении такого четкого пограничного слоя нет, так как скорость изменяется за счет вязкости по всему сечению трубы. Другими словами, в этом случае вся труба находится в пределах пограничного слоя.

Неустойчивость ламинарного течения и возникновение турбулентности — сложные вопросы, до конца не выясненные и в настоящее время.

Обтекание тела потоком. Большое практическое значение имеет вопрос о силах, действующих на твердое тело, движущееся в неподвижной жидкости или газе. Часто оказывается более удобным рассматривать обтекание неподвижного тела набегающим потоком жидкости. Оба подхода эквивалентны в силу механического принципа относительности.

Разложим полную силу $\mathbf{F}$, действующую на тело со стороны потока, на две составляющие: в направлении потока $\mathbf{F}_{\parallel}$ и перпендикулярную потоку $\mathbf{F}_{\perp}$. Силу $\mathbf{F}_{\parallel}$ обычно называют *лобовым сопротивлением*, силу $\mathbf{F}_{\perp}$ — *подъемной силой*.

Парадокс Даламбера. При стационарном обтекании твердого тела потоком идеальной жидкости лобовое сопротивление должно вообще отсутствовать. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим обтекание симметричного тела, изображенного на рис. 227. Линии тока симметричны относительно плоскости MN, а скорости частиц жидкости в соответствующих точках перед и за телом равны по модулю и отличаются только по направлению. Давление в этих точках одинаково согласно уравнению Бернулли. Теперь легко сообразить, что составляющие сил давления в точках A и B, направленные

параллельно потоку, компенсируют друг друга. Так как полная сила, действующая на тело со стороны потока, равна сумме сил давления жидкости, действующих на отдельные элементы поверхности твердого тела, то лобовое сопротивление отсутствует.

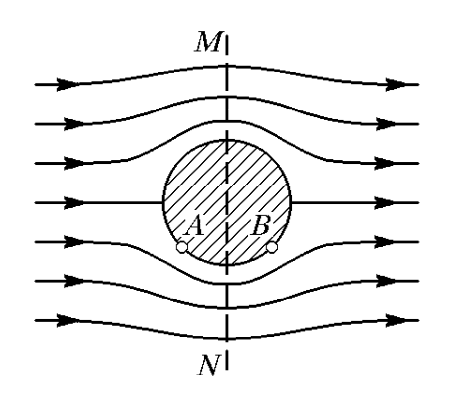
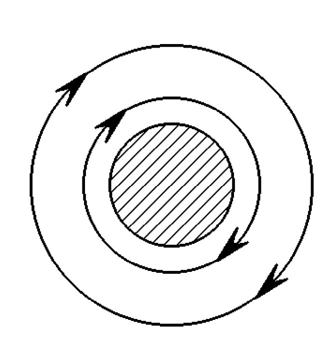


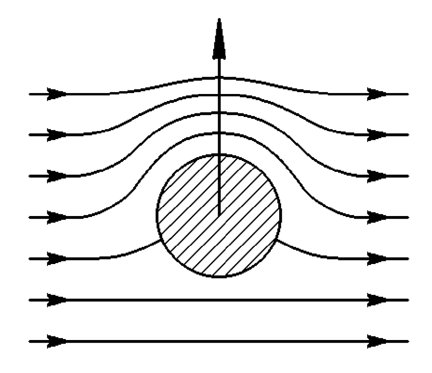
Рис. 227. Обтекание симметричного тела равномерным потоком воздуха

В рассмотренном на рис. 227 случае в силу симметрии картины обтекания тела равно нулю не только лобовое сопротивление, но и подъемная сила. Можно показать, что этот результат — равенство нулю полной силы, действующей на тело со стороны потока идеальной жидкости, — справедлив для тела произвольной формы, имеющего конечные размеры. В этом состоит так называемый *парадокс Даламбера.*

Подъемная сила. Иначе обстоит дело при обтекании тела, имеющего бесконечные размеры в направлении, перпендикулярном потоку. Лобовое сопротивление в идеальной жидкости отсутствует и в этом случае, в то время как подъемная сила может быть отлична от нуля. Теория подъемной силы для крыла бесконечного размаха была создана Н. Е. Жуковским, который показал, что для возникновения подъемной силы необходимо существование циркуляции воздуха вокруг обтекаемого тела.

Эффект Магнуса. Чтобы лучше понять причину возникновения подъемной силы, рассмотрим вначале обтекание вращающегося цилиндра равномерным потоком воздуха. Если бы цилиндр не вращался, то из-за малой вязкости воздуха картина обтекания набегающим потоком мало отличалась бы от изображенной на рис. 227. Вязкий воздух «прилипает» к поверхности цилиндра. Поэтому при


Рис. 228. Линии тока в вязком воздухе вокруг вращающегося цилиндра


Рис. 229. Обтекание вращающегося цилиндра набегающим потоком

вращении цилиндр увлекает прилегающие слои воздуха, вызывая его циркуляцию. Если бы набегающего потока не было, то вследствие вязкости, пренебрегать которой здесь нельзя, картина линий тока воздуха вокруг вращающегося цилиндра имела бы вид, показанный на рис. 228. При этом чем дальше от цилиндра, тем меньше скорость увлекаемого цилиндром воздуха.

При обтекании потоком воздуха вращающегося цилиндра происходит наложение картин, показанных на рис. 227 и 228. В тех местах, где скорости поступательного движения воздуха с потоком и вращения вместе с цилиндром совпадают по направлению, результирующая скорость воздуха превосходит скорость потока, набегающего на цилиндр. Там, где обусловленная вращением скорость воздуха направлена противоположно набегающему потоку, результирующая скорость воздуха меньше скорости потока. Таким образом, получается картина обтекания набегающим воздухом вращающегося цилиндра, изображенная на рис. 229: скорость воздуха снизу цилиндра меньше, а давление, следовательно, больше, чем сверху. Возникает подъемная сила. Это явление называется *эффектом Магнуса.*

Эффект Магнуса легко наблюдать экспериментально при скатывании с наклонной плоскости легкого цилиндра из плотной бумаги (рис. 230). Направленная перпендикулярно скорости поступательного движения цилиндра подъемная сила приводит к резкому увеличению крутизны траектории — цилиндр, падая, заворачивает под стол. Эффект Магнуса проявляется при полете закрученного футбольного или теннисного мяча при резаных ударах.

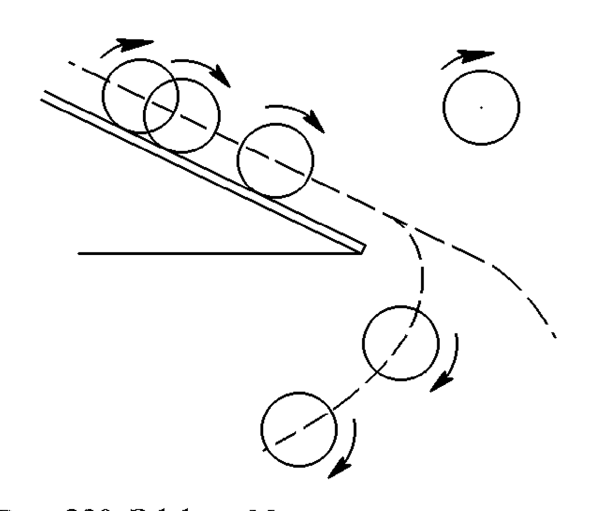


Рис. 230. Эффект Магнуса при скатывании легкого цилиндра с наклонной плоскости

Итак, циркуляция воздуха вокруг твердого тела, находящегося в потоке, приводит к появлению подъемной силы. В эффекте Магнуса циркуляция возникает за счет вращения цилиндра. В других случаях циркуляция может возникнуть и без вращения тела. Так, например, циркуляция возникает при обтекании вязкой жидкостью несимметричного тела.

Вязкость и циркуляция. Отметим, что циркуляция не может возникать в идеальной жидкости, где вообще не существует касательных напряжений между различными слоями жидкости. Роль вязкости в образовании циркуляции можно проиллюстрировать следующим эффектным опытом. Пусть в потоке жидкости на дне русла имеется углубление (рис. 231). При отсутствии вязкости

могло бы существовать такое движение, при котором жидкость в углублении была бы неподвижной (рис. 231*а*). При этом скорость жидкости менялась бы скачком на параллельной дну русла поверхности NN'. В реальной жидкости при скольжении придонного

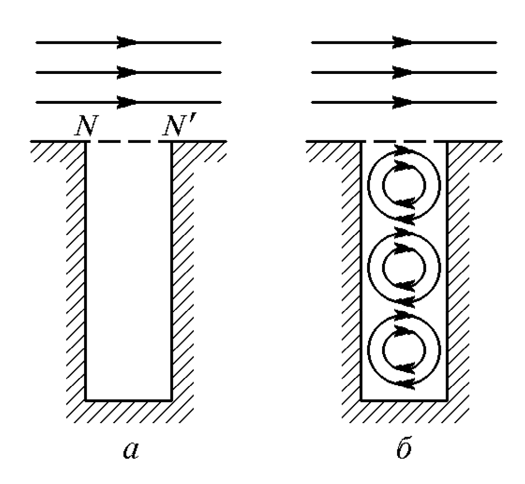


Рис. 231. Линии тока в случае прямоугольной выемки в дне русла

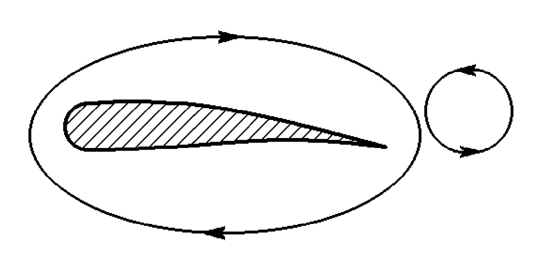


Рис. 232. К возникновению циркуляции воздуха вокруг крыла самолета

слоя над неподвижной водой в яме благодаря вязкости возникает касательная сила, которая приводит верхний слой воды в яме в движение в направлении потока. Но движение воды в яме ограничено стенками, и в результате в ней образуется система вращающихся «сцепленных шестерен» (рис. 231*б*).

Вязкость воздуха приводит к возникновению циркуляции вокруг крыла самолета. Опыт показывает, что циркуляция вокруг крыла возникает следующим образом. Вблизи острой задней кромки крыла возникают вихри, в которых вращение воздуха происходит против часовой стрелки (рис. 232). Эти вихри увеличиваются, отрываются от крыла и уносятся набегающим потоком воздуха. При этом остальная

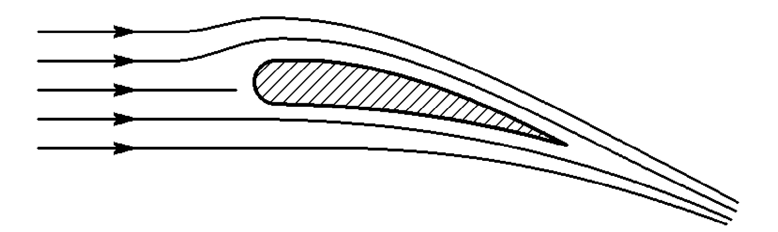


Рис. 233. Линии тока при обтекании крыла

масса воздуха вблизи крыла начинает совершать вращательное движение в противоположную сторону, образуя циркуляцию вокруг крыла по часовой стрелке. Циркуляционный поток, складываясь с набегающим, ускоряет движение воздуха над крылом. В результате картина обтекания крыла потоком принимает вид, изображенный на рис. 233; давление воздуха над крылом понижается, под крылом повышается, что и приводит к возникновению подъемной силы.

Лобовое сопротивление. При движении тела в вязкой жидкости или газе на тело наряду с подъемной силой действует сила лобового сопротивления. Можно указать две причины возникновения этой силы. Во-первых, вклад в лобовое сопротивление дают касательные силы внутреннего трения, действующие со стороны потока жидкости на «прилипший» к поверхности тела пограничный слой. Во-вторых, лобовое сопротивление возникает в результате различия в силах давления на переднюю и заднюю части тела вследствие несимметричности картины обтекания вязкой жидкостью даже симметричного тела.

При изучении движения вязкой жидкости и газа, а также движения твердых тел в жидкости и газе вследствие больших математических трудностей при динамическом описании широкое распространение получили метод подобия и метод анализа размерностей. Эффективность метода анализа размерностей проявляется уже в следующем простом примере, который может быть исследован до конца и в рамках динамического подхода.

Вязкая жидкость в трубе. При ламинарном течении жидкости по трубе круглого сечения профиль скоростей параболический (см. рис. 226*а*) и объем жидкости V, протекающей через сечение трубы за время t, пропорционален времени t и зависит от разности давлений Δp на концах трубы, вязкости η, длины l и радиуса R трубы. Найдем эту зависимость. Будем искать выражение для объема в виде

$$V = C(\Delta p)^x \eta^y l^z R^u t.$$

Здесь удобно измерять длину вдоль и поперек трубы в разных единицах с размерностями $L_\parallel$ и $L_\perp$. Тогда

$$\dim l = L_\parallel, \quad \dim R = L_\perp, \quad \dim V = L_\parallel L_\perp^2,$$

$$\dim \Delta p = ML_\perp^{-2}T^{-2}, \quad \dim \eta = ML_\parallel^{-1}T^{-1},$$

и равенство размерностей имеет вид

$$L_\parallel L_\perp^2 = \left(ML_\parallel L_\perp^{-2}T^{-2}\right)^x \left(ML_\parallel^{-1}T^{-1}\right)^y L_\parallel^z L_\perp^u T.$$

Приравнивая показатели степеней,

$$M\colon\ 0 = x + y, \quad L_\parallel\colon\ 1 = x - y + z,$$

$$L_\perp\colon\ 2 = -2x + u, \quad T\colon\ 0 = -2x - y + 1,$$

находим $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$, $u = 4$, и для V получаем

$$V = C\,\frac{\Delta p R^4}{\eta l}\,t$$

Таким образом, объем жидкости, протекающий через сечение трубы за время t, пропорционален разности давлений на единицу

длины трубы $\Delta p/l$ и обратно пропорционален вязкости, что достаточно очевидно и без приведенного расчета. Однако не столь тривиален вывод о том, что объем жидкости пропорционален четвертой степени радиуса трубы (т. е. квадрату площади ее поперечного сечения). Полученные закономерности справедливы для трубы с постоянным поперечным сечением произвольной формы. В случае круглого сечения динамический расчет дает $C = 8/\pi$.

- Почему силы сопротивления при движении тела в жидкости или газе называют внутренним трением?
- Чем отличаются ламинарное и турбулентное движения жидкости или газа? Что такое пограничный слой?
- В каких случаях движение тела в идеальной жидкости не сопровождается лобовым сопротивлением и подъемной силой? Почему так происходит?
- Объясните, как возникает боковая сила при движении закрученного теннисного или футбольного мяча.
- Какую роль играет циркуляция воздуха вокруг крыла самолета в возникновении подъемной силы?
- Поясните, как получить использованную в тексте размерность вязкости.